

# Simulación numérica del proceso de fractura en modo I de vigas de concreto con trayectoria de fisuración conocida mediante un modelo discreto de fisura cohesiva

## Numerical modeling of the fracture process in mode I of concrete beams with known cracking path by means of a discrete model of cohesive crack

Rubén Graffe\*<sup>1</sup>, Dorian Linero\*

\* Universidad Nacional de Colombia . COLOMBIA

Fecha de recepción: 11/ 08/ 2010  
Fecha de aceptación: 12/ 11/ 2010  
PAG. 399 - 418

### Resumen

Este trabajo describe la formulación, implementación y aplicación de un modelo discreto de fisura cohesiva el cual permite simular el proceso de fractura en modo I de vigas de concreto simple cuya trayectoria de fisuración está definida. En el proceso de fractura se establece una relación entre el esfuerzo normal de cohesión y la apertura de una fisura, donde el material ubicado fuera de la zona de fractura conserva un comportamiento elástico lineal en carga o descarga, mientras que el material en el interior de la zona de fractura tiene un comportamiento inelástico con ablandamiento por deformación. En la malla se ubican parejas de nudos en la misma posición espacial sobre la trayectoria de la fisura, las cuales desligan a los elementos bidimensionales contiguos. Estos nudos duplicados están conectados entre sí por resortes elasto – plásticos que representan el proceso de fractura. Se simulan numéricamente tres vigas de concreto de diferentes dimensiones que soportan una carga en el centro de la luz. Cada simulación es un análisis no lineal estático con elementos finitos en condición plana de esfuerzos, considerando deformaciones infinitesimales y aplicando un desplazamiento vertical incremental sobre la cara superior de la mitad de la luz de la viga. Se obtuvieron resultados satisfactorios de la respuesta estructural de las vigas, en comparación con los ensayos experimentales y modelaciones numéricas desarrolladas por otros autores.

Palabras Clave: Análisis estructural, mecánica de la fractura, mecánica computacional, vigas de concreto, elementos finitos.

### Abstract

This work describes the formulation, implementation and application of a cohesive crack discrete model, which can simulate the fracture process in mode I of simple concrete beams with defined cracking pattern. In the fracture process, a relationship between the cohesive normal stress and crack opening is established, where the material outside the fracture zone has a lineal elastic behavior in loading and unloading, whereas the material inside the fracture zone has an inelastic behavior with strain softening. In the mesh, pairs of nodes at the same spatial position are put on the cracking pattern and disconnect the adjoining two-dimensional elements. These duplicated nodes are connected to elasto-plastic springs that represent fracture process. Three concrete beams subjected to load at the middle with different dimensions are numerically simulated. Each numerical simulation is a nonlinear finite elements analysis in plane stress state, considering infinitesimal strain and applying an incremental vertical displacement on the top side of the mid-span of the beam. Satisfactory results of the structural response are obtained, as compared with experimental tests and numerical modeling carried out by other authors.

Keywords: Structural analysis, fracture mechanics, computational mechanics, concrete beams, finite element.

## 1. Introducción

En la simulación numérica del comportamiento mecánico del concreto existen dos metodologías clásicas que describen la zona del proceso de fractura. La primera aproximación denominada metodología de fisura discreta considera que toda la zona de fractura se concentra en una línea de fisuración y se caracteriza por una ley esfuerzo – deformación que exhibe ablandamiento.

## 1. Introduction

Numerical modeling of concrete mechanical behavior has two typical methodologies describing fracture process zone. The first approach known as discrete crack methodology considers that the whole fracture zone is centered in one crack line and it is characterized by a stress – strain law that provokes a softening effect.

<sup>1</sup> Autor de correspondencia / Corresponding author:  
E-mail: rubengraffe@ingetec.com.co



La segunda o metodología de fisura distribuida establece que la deformación inelástica localizada en la zona de fractura está distribuida en una banda de ancho definido, imaginada alrededor del frente de la fisura principal (Bazant y Planas, 1998). Los modelos de fisura cohesiva están basados en la primera metodología.

En los años sesentas Dugdale (1960) y Barenblatt (1962), introducen los primeros modelos de fisura cohesiva, los cuales buscaban representar el comportamiento no lineal ubicado en el frente de una fisura de trayectoria conocida en modo I, es decir, cuando las caras de la fisura se separan en dirección perpendicular al plano de la misma. En estos modelos se reemplazan las fuerzas cohesivas transferidas de la zona de fractura al medio elástico circundante por fuerzas externas equivalentes, considerando la disipación de energía asociada al fenómeno de propagación de la fisura.

Años después, el denominado modelo de fisura ficticia propuesto por Hillerborg et al. (1976), extiende la definición de fisura cohesiva estableciendo que esta última puede ubicarse en cualquier lugar, sin conocerse su trayectoria previamente. Este trabajo vincula los conceptos de la mecánica de la fractura y del método de los elementos finitos (Hughes 2000, Oñate 2009). Los dos elementos fundamentales para estudiar la fractura en el concreto con este modelo son: (1) la existencia de una zona de proceso de fractura en la vecindad de una fisura abierta debida a la localización de la deformación y (2) una ley constitutiva que represente la propagación de la fisura definida mediante la relación entre las fuerzas cohesivas y el desplazamiento normal entre las caras de la fisura en el interior de la zona de fractura (Shi, 2009).

Este artículo presenta la formulación, implementación y aplicación de un modelo discreto de fisura cohesiva en el marco del método de los elementos finitos, el cual permite simular el proceso de fractura en modo I de vigas de concreto simple cuya trayectoria de fisuración es conocida (Graffe 2010). Como ejemplos de aplicación se simulan numéricamente tres vigas simplemente apoyadas de diferentes dimensiones que soportan una carga puntual en el centro de la luz. Los resultados obtenidos se comparan con ensayos experimentales y modelaciones numéricas desarrolladas por otros autores como Lotfi y Shing (1995), Sancho et al. (2007) y Alfaiate et al. (2003).

The second or, distributed crack methodology establishes that inelastic strain located in the fracture zone is distributed in a panel strip with defined width, which is imaginarily located in front of main crack (Bazant and Planas, 1998). Cohesive crack models are based on the first methodology.

In the 60's Dugdale (1960) and Barenblatt (1962) introduced the first cohesive crack models, which intended to represent the non-linear behavior placed in front of a known crack path in mode I, i.e., when crack sides are diverted in perpendicular direction from crack flat surface. In such models cohesive forces transferred from fracture zone to continuous elastic support are replaced by external equivalent forces, considering energy dissipation associated to crack spread phenomenon.

Thereafter, the fictitious crack model proposed by Hillerborg et al. (1976) extends cohesive crack definition, by indicating that the latter may be located at any place, without knowing its previous path. This study connects fracture mechanics concepts and finite elements method (Hughes 2000, Oñate 2009). Two fundamental elements required to study concrete fracture with such model are (1) a fracture process in progress in the surrounding zone of an open crack due to strain allocation and, (2) an official codification that represents defined crack spread by means of a relation between cohesive forces and normal displacement of crack sides in the inner crack zone (Shi, 2009).

This article introduces the formulation, implementation and application of a cohesive crack discrete model, under a framework of finite element methods, which is able to simulate a fracture process in mode I for plain concrete beams whose crack path is well known (Graffe 2010). As application examples, three support beams of different dimensions are numerically simulated, which bear a support point in the center span. Results obtained are compared with experimental trials and numerical simulations developed by other authors as Lotfi and Shing (1995), Sancho et al. (2007) and Alfaiate et al. (2003).

Dicho modelo establece el primer paso a la descripción general del proceso de fractura en el concreto simple. La validación del modelo confirmará que su metodología puede aplicarse a nuevos modelos cohesivos del mismo tipo considerando trayectorias de fisuración desconocidas a priori.

Such model becomes the first step towards general overview of a plain concrete fracture process. The model validation shall confirm this methodology may be applied on new cohesive models of same type by considering crack paths previously unknown.

## 2. Zona del proceso de fractura en modelos de fisura cohesiva

## 2. Fracture zone process in cohesive crack models

En el modelo de fisura cohesiva del concreto se considera que el proceso de fractura en un punto material comienza cuando el esfuerzo principal mayor en dicho punto alcanza la resistencia a tracción del concreto  $\sigma_t$  (Figura 1 (a)), tal como lo establece el criterio de fallo de Rankine. Así mismo, se supone que la normal a la superficie de la fisura coincide con la dirección del esfuerzo principal mayor. Por otro lado, se admite que el material fuera de la zona de fractura tiene un comportamiento isótropo, lineal y elástico caracterizado por su módulo de Young  $E$  y su relación de Poisson  $\nu$ .

In concrete cohesive crack model, the fracture process in a material point begins when main stress is higher in such point and reaches concrete tensile strength  $\sigma_t$  (Figure 1 (a)), as established by Rankine's failure criterion. Furthermore, it is assumed that normal stress on the crack surface coincides with main higher stress direction. On the other side, it is admitted that material located outside fracture zone has an isotropous, linear and elastic behavior characterized by Young  $E$  module and Poisson relation  $\nu$ .

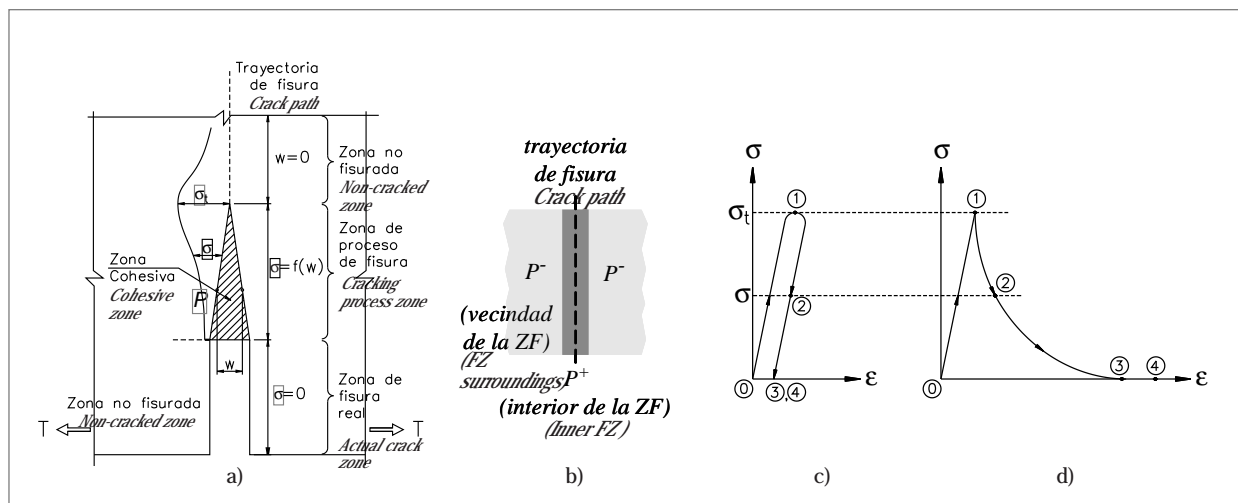


Figura 1. Modelo de fisura cohesiva: (a) zona del proceso de fractura, (b) detalle del punto material P dentro y fuera de la zona de fractura, (c) relación esfuerzo – deformación de un punto material ubicado fuera de la zona de fractura  $P^-$ , y (d) relación esfuerzo – deformación de un punto material ubicado en el interior de la zona de fractura  $P^+$  (Graffe 2010)

Figure 1. Cohesive crack model: (a) fracture process zone, (b) detail of material point P inside and outside fracture zone, (c) relation stress – strain in a material point located outside the fracture zone  $P^-$ , and stress – strain of a material point located inside the fracture zone  $P^+$  (Graffe 2010)

Sean  $P^-$  y  $P^+$  dos puntos sobre la misma coordenada material de un sólido, pero ubicados fuera y dentro de la zona de fractura respectivamente (Figura 1(b)), cuyas relaciones esfuerzo – deformación están indicadas en la Figura 1(c) y en la Figura 1(d). Durante el proceso de aplicación de la carga externa, el comportamiento en  $P^-$  y  $P^+$  es el mismo hasta que el material alcanza la resistencia a la tracción, es decir, entre los puntos 0 y 1 de las curvas esfuerzo – deformación. A partir de este momento y entre los puntos 1 y 3 de las curvas, el material de la zona de fractura presenta un ablandamiento, en el cual aumenta la deformación mientras se reduce el esfuerzo cohesivo, en cambio, el material fuera de la zona de fractura se descarga elásticamente. Esta etapa demuestra que en la vecindad de un punto material se bifurca de la deformación, mientras se conserva la continuidad del esfuerzo normal a un plano ortogonal a la fisura. Después del punto 3, el esfuerzo cohesivo y la deformación fuera de la zona de fractura es nulo, mientras que la deformación en la zona de fisura sigue aumentando.

En la zona del proceso de fractura del concreto en modo I mostrada en la Figura 1(a), la apertura  $w$  de la denominada fisura cohesiva aumenta progresivamente, mientras disminuye el valor del esfuerzo  $\sigma$  normal a las caras de la misma de la forma:

$$\sigma = f(w) \quad (1)$$

Esta relación entre el esfuerzo normal y la apertura de fisura describe el ablandamiento generado por la pérdida progresiva de la cohesión en la zona de fractura y se denomina curva de ablandamiento (Figura 2(a)).

Para una apertura inicial igual a cero, el esfuerzo normal es igual a la resistencia a tracción del material, es decir  $w=0$  y  $\sigma=\sigma_t$ . En cambio, cuando el esfuerzo normal es nulo, es decir, cuando se pierde la transmisión de fuerzas de cohesión entre las caras, se declara la existencia de una discontinuidad notoria del material llamada fisura real, cuya apertura sigue creciendo a partir del valor crítico  $w=w_c$ .

La energía por unidad de área en un punto material consumida desde la aparición de una fisura cohesiva, es decir para  $0 < w \leq w_c$  y  $0 < \sigma \leq \sigma_t$ , hasta la formación de una fisura real, cuando  $w = w_c$  y  $\sigma = 0$ , se denomina energía específica de fractura o simplemente energía de fractura  $G_f$ . Tal energía es igual a la integral expresada en la siguiente ecuación, la cual corresponde al área bajo la curva de ablandamiento, como se indica en la Figura 2(a).

Where  $P^-$  and  $P^+$  are two points on the same solid material coordinate, but located outside and inside the fracture zone, respectively (Figure 1(b)), which stress – strain relation are indicated in Figure 1(c) and Figure 1(d). During external load application process, behavior  $P^-$  and  $P^+$  is the same until material reaches tensile stress, i.e. between points 0 and 1 of stress – strain curves. From that moment on, and between curves points 1 and 3, material in the fracture zone is softened, when strain strength increases while cohesive stress decreases, however, material outside fracture zone is elastically unloaded. This stage demonstrates that a material point surrounding is separated from strain, while normal stress continuity is kept at an orthogonal crack plane. After point 3, cohesive stress and strain outside the fracture are void, while strain keeps increasing in the crack zone.

In concrete crack process zone, in mode I, shown in Figure 1(a), the opening  $w$  of the so-called cohesive crack rises progressively, while the normal strain value  $\sigma$  decreases in the crack sides as follows:

This relation between normal strain and crack opening describes the softening effect generated by cohesion progressive loss in the fracture zone, which is called softening curve (Figure 2 (a)).

For initial opening equal zero, normal strain is equal to material tensile strength, i.e.  $w=0$  and  $\sigma=\sigma_t$ . However, when normal stress is void, i.e., when cohesion transmission forces among faces is lost, the presence of notorious material discontinuity called actual crack is declared, which opening keeps increasing as from critical value  $w=w_c$ .

Energy per unit area in a material point consumed as from cohesive crack arousal i.e. for and , up to actual crack formation, when  $0 < w \leq w_c$  and  $0 < \sigma \leq \sigma_t$ , up to actual crack formation, when  $w = w_c$  and  $\sigma = 0$ , it is called crack specific energy or simply fracture energy  $G_f$ . Such energy is equal to integral expressed by the following equation, which corresponds to the area below softening curve, as shown in Figure 2(a).

$$G_F = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (2)$$

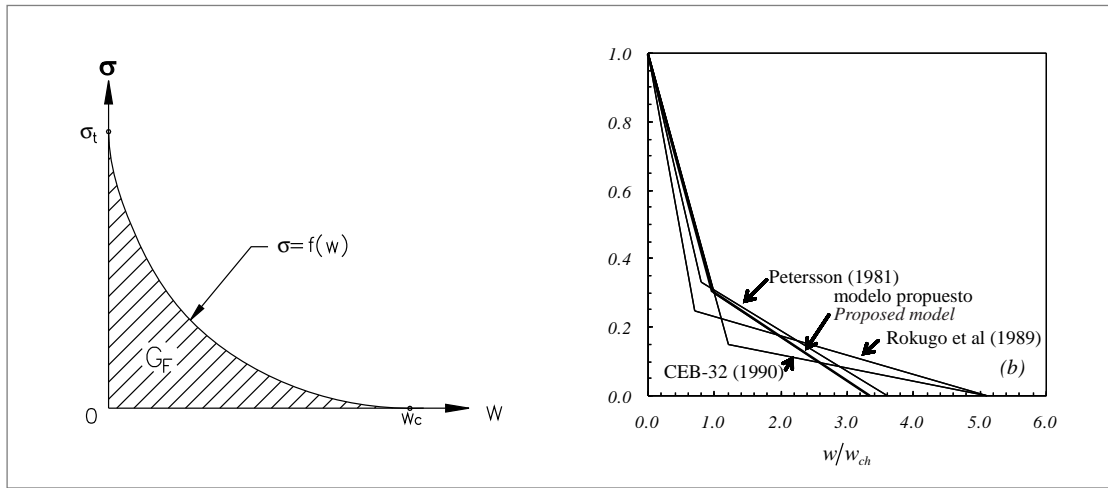


Figura 2. Modelo de fisura cohesiva, relación entre el esfuerzo normal de cohesión y la apertura de la fisura: (a) curva general de ablandamiento, (b) curvas de ablandamiento bilineales del modelo propuesto y de diferentes autores (Bazant & Planas 1998)

Figure 2. Cohesive crack model, relation between normal cohesive stresses and crack opening: (a) general softening curve, (b) two-linear softening curves of model proposed by different authors (Bazant & Planas 1998)

La energía de fractura y la curva de ablandamiento son parámetros particulares de cada material y su valor se puede determinar mediante ensayos de laboratorio. Algunos autores han obtenido valores de  $G_F$  para el concreto entre 100 y 115 N/m (Lotfi & Shing 1995, Sancho et al., 2007, Alfaiate et al., 2003) y curvas de ablandamiento simplificadas mediante dos líneas rectas, como se muestra en Figura 2(b) (CEB 1991, Petersson 1981, Rokugo et al., 1989), siendo  $w_{ch} = G_F/\sigma_t$ .

### 3. Formulación general del modelo

El modelo numérico desarrollado en este trabajo ha sido implementado en el método de los elementos finitos bajo las siguientes suposiciones: (1) el problema mecánico se puede simplificar a una condición plana de esfuerzos, considerando deformaciones infinitesimales y cargas externas estáticas (Oñate 2009), (2) solo se produce una fisura en el elemento estructural cuya trayectoria se conoce a priori (Petersson 1981), (3) la fisura describe un mecanismo de apertura en modo I, es decir, que la componente del desplazamiento entre las caras de una fisura es positiva y perpendicular a la trayectoria de la misma (Rots 1988), (4) durante el proceso de fractura se establece una relación conocida entre el esfuerzo normal de cohesión y la apertura de una fisura (Bazant & Planas 1998),

Fracture energy and softening curves are particular parameters of each material and their value may be determined by means of laboratory tests. Some authors have obtained  $G_F$  values for concrete between 100 and 115 N/m (Lotfi & Shing 1995, Sancho et al., 2007; Alfaiate et al., 2003) and; simplified softening curves by means of two straight lines, as shown in Figure 2(b) (CEB 1991, Petersson 1981, Rokugo et al. 1989), where  $w_{ch} = G_F/\sigma_t$ .

### 3. Model general formulation

Numerical model developed by this study has been implemented with the finite elements method under the following assumptions: (1) mechanical issue may be simplified with a flat stress condition, by considering infinitesimal strains and static external loads (Onate 2009); (2) only a crack in the structural element is produced, which path is previously known (Petersson 1981), (3) crack describes an opening mechanism in mode I, i.e, displacement component between crack sides is positive and perpendicular to its path (Rots 1988); (4) during fracture process a known relation is established between cohesive normal stress and crack opening (Bazant and Planas 1998);

(5) el material ubicado fuera de la zona de fractura conserva un comportamiento elástico lineal en carga o descarga, mientras que el material en el interior de la zona de fractura tiene un comportamiento inelástico con ablandamiento por deformación (Shi, 2009).

Bajo las suposiciones anteriores se puede representar el proceso de fractura en vigas de sección transversal rectangular constante de concreto simple sometidas a cargas transversales estáticas en un solo plano, cuyo fallo material está determinado por flexión. En ensayos experimentales de este tipo, las componentes de esfuerzos no nulas están contenidas en el plano de la viga describiendo un estado plano de esfuerzos, el concreto presenta deformaciones pequeñas respondiendo a la teoría de las deformaciones infinitesimales y el estado de flexión genera la aparición de una sola fisura aproximadamente vertical. Así mismo, se ha observado que mientras las caras de la fisura tienden a separarse cada vez más la fuerza aplicada se reduce, lo cual significa que el material fuera de la zona de fractura presenta una descarga aproximadamente elástica.

El dominio del sólido está dividido por elementos finitos definidos en un espacio bidimensional de coordenadas globales  $x$  y  $y$ . Estos elementos son estándar de continuidad  $C^0$  en el campo del desplazamiento y en consecuencia cuentan con dos grados de libertad por nudo asociados a los desplazamientos longitudinales en las direcciones  $x$  y  $y$  (Hughes, 2000; Oñate 2009), como lo indica la Figura 3(a) y la Figura 3(b).

(5) material placed outside fracture zone maintains linear elastic behavior for load and unload, while material inside the fracture zone has an inelastic behavior with softening due to strain strength (Shi, 2009).

By means of above assumptions the fracture process in constant transverse rectangular section for plain concrete beams subjected to statically transverse loads can be represented only in one plane, which material failure is determined by flexural strength. In such experimental tests non-void stress components are contained in the beam plane describing a stress flat status; concrete shows small strain thus responding to the theory of infinitesimal strains and, flexural strength condition provokes the arousal of only one approximately vertical crack. In the same way, it has been noticed that while crack sides tend to continuously separate, the applied force is reduced, which means that material outside the fracture zone shows an approximately elastic unload.

Solid domain is divided by finite elements defined in a two-dimensional space of global coordinates  $x$  and  $y$ . Those are standard elements of  $C^0$  continuity in displacement field and, consequently they have two freedom degrees by node associated to longitudinal displacements in  $x$  and  $y$  directions (Hughes, 2000; Onate 2009), as shown in Figure 3(a) and Figure 3(b).

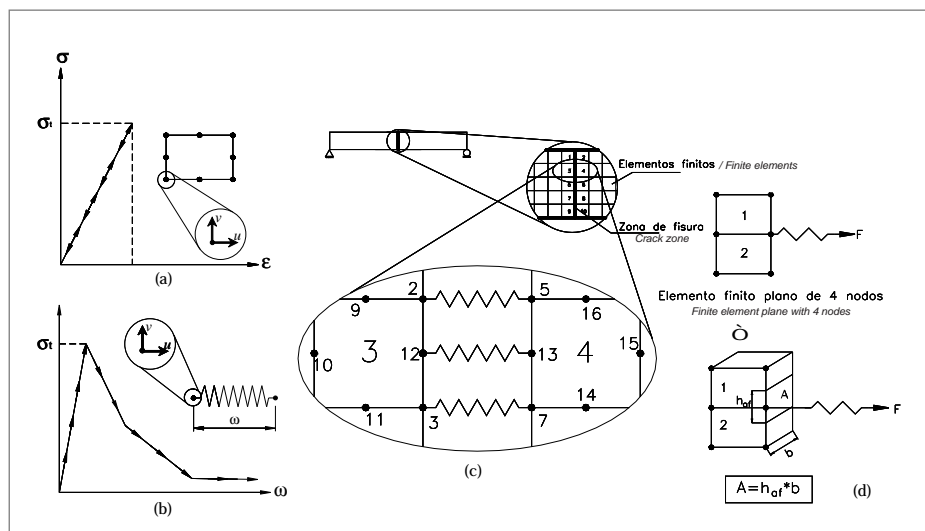


Figura 3. Tipo de elementos finitos y su relación constitutiva: (a) elemento bidimensional elástico, (b) elemento resorte elasto - plástico, (c) conexión entre elementos de la zona de fractura, (d) área aferente del esfuerzo cohesivo en la zona de conexión entre elementos bidimensionales y resortes (Graffe 2010)  
 Figure 3. Type of finite elements and its constituent relation: (a) two-dimensional elastic element; (b) elastic-plastic spring element; (c) connection between elements in the fracture zone; (d) afferent cohesive stress area in the connection zone between two-dimensional elements and springs (Graffe 2010)



La geometría de la estructura está conformada por elementos bidimensionales cuadrilaterales unidos mediante nudos. Además, se ubican parejas de nudos en la misma posición espacial sobre la trayectoria de la fisura, los cuales desligan a los elementos bidimensionales contiguos sobre la zona de fractura. Estos nudos duplicados en la misma coordenada están conectados entre sí por los resortes de dimensión nula, es decir  $e=0$ , que representan el proceso de fractura, como se ilustra en la Figura 3(c).

Los elementos finitos bidimensionales como los cuadrilaterales isoparamétricos lineal y cuadrático, tienen un comportamiento elástico lineal isótropo y representan el material ubicado fuera de la zona de fractura (Figura 3(a)). Las propiedades mecánicas de estos elementos son el módulo de Young  $E$  y la relación de Poisson  $\nu$  del concreto.

Los parámetros de la curva de ablandamiento del modelo numérico se calibran con los resultados experimentales de Petersson (1981), indicados como viga VI. Las simulaciones realizadas para las vigas de concreto V2 y V3 se realizan con el modelo previamente calibrado. Se espera que los parámetros de la curva de ablandamiento del modelo numérico se conserven constantes en la simulación de elementos estructurales con concretos similares.

#### 4. Representación del comportamiento cohesivo en la zona de fractura

El comportamiento cohesivo en el interior de la zona de fractura se describe mediante resortes perpendiculares a la dirección de la fisura, en los cuales se activa una relación constitutiva de plasticidad con ablandamiento después de alcanzada la resistencia a tracción del concreto. El alargamiento y la fuerza en el resorte representan la apertura de la fisura  $w$  y la fuerza de cohesión  $F$  de la misma. Esta fuerza se obtiene del producto entre el esfuerzo cohesivo  $\sigma$  y el área aferente del resorte  $A_f$ , es decir,

$$F(w) = \sigma(w) A_f \quad (3)$$

Por lo tanto, la fuerza en el resorte  $F_t$  resultante cuando el esfuerzo cohesivo es igual a la resistencia a tracción es igual a:

$$F_t = \sigma_t A_f \quad (4)$$

The structure geometry is composed of two-dimensional quadrilateral elements joined by nodes. Furthermore, pairs of nodes are placed in the same spatial position over the crack path, which unfasten adjoining two-dimensional elements over fracture zone. Such duplicated nodes in the same coordinate are connected each other by void dimensional springs, i.e.  $e=0$ , which represent the fracture process, as shown in Figure 3(c).

Two-dimensional finite elements as linear and quadratic isoparametric quadrilaterals have a linear elastic isotropic behavior and represent the material placed outside fracture zone (Figure 3(a)). Mechanical properties of such elements are Young  $E$  module and concrete Poisson  $\nu$  relation.

Softening curves parameters of numeric model are calibrated by means of experimental tests results by Petersson (1981), indicated as beam VI. Simulations conducted for concrete beams V2 and V3 are developed with the previously calibrated model. It is expected that softening curves parameters of numeric model are kept constant during structural elements simulation with some similar kinds of concrete.

#### 4. Representation of cohesive behavior in the fracture zone

Cohesive behavior inside fracture zone is described by means of springs placed perpendicularly to crack direction, which trigger a softening plasticity constitutive relation after reaching concrete tensile strength. Elongation and strength in spring represent crack  $w$  and cohesion strength  $F$ . Such force is obtained by the product between cohesive  $\sigma$  strength and spring afferent area  $A_f$ , as follows:

Therefore spring strength  $F_t$  resulting when cohesive strength is equal to tensile strength:

En la superficie delimitada por el área aferente del resorte  $A_f$  se distribuye un esfuerzo normal cohesivo constante equivalente a la acción de la fuerza interna  $F$ , como lo indica la Figura 3(d). En problemas bidimensionales con espesor constante  $b$ , el área aferente es igual a:

$$A_f = bh_f \quad (5)$$

Lo anterior establece una relación directa entre la curva de ablandamiento en la zona de fractura del concreto y la curva idealizada  $F(w)$  entre la fuerza y el alargamiento del resorte mostrada en la Figura 4(a).

Con el fin de conservar la estabilidad de la solución numérica en el análisis no lineal con elementos finitos, se define la relación aproximada  $F(w)$  de la curva idealizada  $F(w)$  entre la fuerza y el alargamiento del resorte a tracción. Como lo muestra la Figura 4(b), el tramo 3 - 4 de la curva aproximada es elástico de rigidez  $k_2$  con tendencia a infinita, lo cual asegura la conexión total entre los elementos bidimensionales antes de alcanzar la resistencia a tracción del material. En cambio, en el tramo 6 - 7 se mantiene un valor constante muy pequeño de la fuerza cohesiva remanente  $\gamma F_t$ . Por lo tanto, cuando la rigidez de la etapa inicial tiende a infinito, es decir  $K_2 \rightarrow \infty$ , y la fuerza cohesiva remanente en la última etapa tiende a cero, es decir,  $\gamma \rightarrow 0$ , el modelo numérico del resorte recupera las características del modelo de fisura cohesiva.

Por otro lado, el acortamiento del resorte indicaría un comportamiento inconsistente donde se superponen dos regiones del sólido en la zona de fractura. Para evitarlo se considera que la rigidez a compresión  $k_1$ , es decir la pendiente del tramo 2 - 3, tiende a infinito. Después de alcanzada la resistencia a la compresión del material  $\sigma_c$ , el tramo 1 - 2 representa el aplastamiento como una rama de rigidez nula.

Los tramos 4 - 5 y 5 - 6 describen el comportamiento cohesivo en la zona de fractura, donde la fuerza en el resorte está entre  $F_4 = F_t$  y  $F_6 = \gamma F_t$ . Así mismo, en el punto 6 se define a  $w_f$  como la apertura de fisura cuando la fuerza en el resorte es igual a la fuerza cohesiva remanente  $\gamma F_t$ .

Para caracterizar la curva aproximada  $F(w)$  se realizaron varias simulaciones numéricas de calibración del modelo, validadas con la respuesta estructural del ensayo experimental de Petersson (1981) mostrado en la Figura 8. Los resultados de la calibración establecieron que el punto 5 corresponde a una apertura de fisura  $w_5 = 0.3w_f$  y a una fuerza cohesiva  $F_5 = 0.3\sigma_t A_f$ .

On the surface delimited by spring afferent area  $A_f$ , a constant normal cohesive strength equivalent to the action of internal force  $F$  is distributed, as indicated in Figure 3(d). In two-dimensional problems with constant thickness  $b$ , the afferent area is equal to:

Above establishes a direct relation between the softening curve in concrete fracture zone and the idealized curve  $F(w)$  between spring's strength and elongation shown in Figure 4(a).

In order to maintain the numeric solution stability in the non-linear analysis with finite elements, an approximate relation  $F(w)$  is defined for idealized curve  $F(w)$ , between spring's tensile strength and elongation. As shown in Figure 4(b), the approximated segment 3-4 is of an elastic stiffness  $k_2$  with infinite trend, which ensures a full connection among two-dimensional elements before reaching material tensile strength. However, in segment 6-7 a quite small constant value of remaining cohesive force  $\gamma F_t$  is maintained. Therefore, when stiffness tends to infinite in the initial stage (i.e.  $K_2 \rightarrow \infty$ ) and remaining cohesive force in the final stage tends to zero (i.e.  $\gamma \rightarrow 0$ ), spring numerical model recovers the features of cohesive crack model.

On the other hand, spring shortening would indicate a non-consistent behavior where two solid regions are overlapped in the fracture zone. In order to avoid overlapping, compressive stiffness  $k_1$  is considered as tending to infinite, i.e. segment slope 2-3. After reaching material compressive strength  $\sigma_c$ , segment 1-2 represents crushing as a branch of void stiffness.

Segments 4-5 and 5-6 describe cohesive behavior in the fracture zone, where spring stress is between  $F_4 = F_t$  and  $F_6 = \gamma F_t$ . Besides, in point 6,  $w_f$  is defined as crack opening when spring strength is equal to remaining cohesive force  $\gamma F_t$ .

In order to characterize approximate curve  $F(w)$  several numerical calibration were simulated on the model, supported by structural response from Petersson experimental test (1981) shown in Figure 8. Calibration results establish that point 5 corresponds to a crack opening  $w_5 = 0.3w_f$  and also to a cohesive force  $F_5 = 0.3\sigma_t A_f$ .



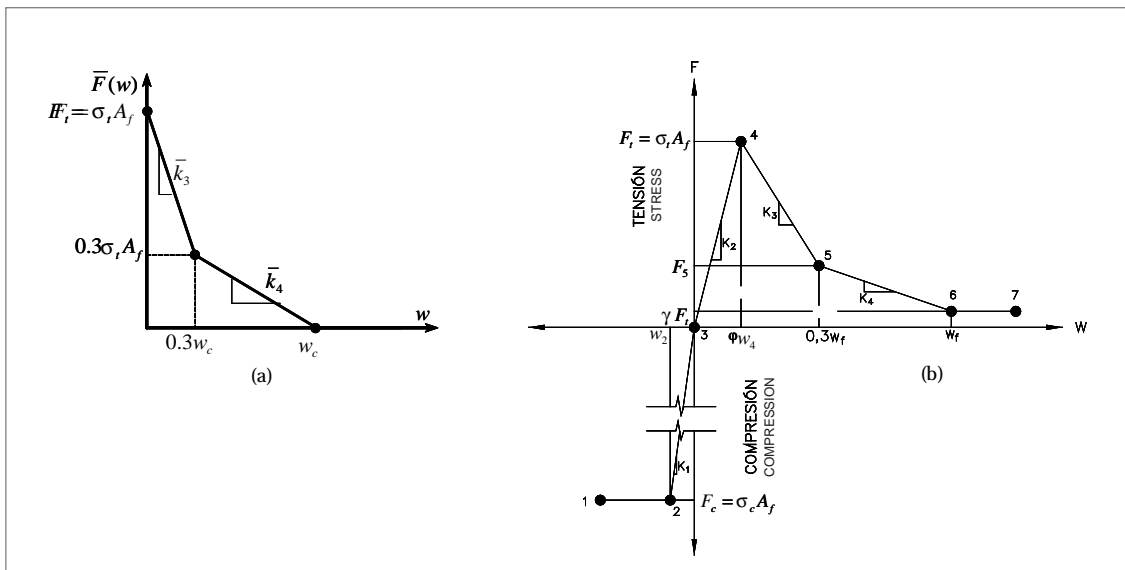


Figura 4. Relación entre la fuerza y el alargamiento del resorte: (a) curva idealizada en tracción, (b) curva aproximada en tracción y compresión utilizada en el modelo numérico  
 Figure 4. Relation between spring strength and elongation: (a) idealized tensile curve, (b) approximate curve in tensile and compressive strengths employed by numeric model

Después de reemplazar la Ecuación (3) en la Ecuación (2), la energía se puede expresar en términos de la curva aproximada fuerza – alargamiento, de la forma:

After replacing Equation (3) in Equation (2), energy can be expressed in terms of approximate strength-elongation curve, as follows:

$$G_F \cong \frac{1}{A_f} \int_0^{w_f} F(w) dw \quad (6)$$

Sustituyendo la función de la fuerza cohesiva  $F(w)$  en la ecuación anterior se obtiene que,

By replacing cohesive force function  $F(w)$  in above equation, the following is obtained:

$$G_F \cong \sigma_t \left[ (0.30 + 0.35\gamma)w_f - 0.15(\sigma_t A_f / k_2) \right] \quad (7)$$

Por lo tanto la apertura de fisura  $w_f$  y las pendientes  $k_3$  y  $k_4$  de la curva de la Figura 4(b) son iguales a:

Therefore, crack opening and slopes  $w_f$  and  $k_3$  and  $k_4$  in the curve shown in Figure 4(b) are equal to:

$$w_f = \frac{G_F / \sigma_t + 0.15\sigma_t A_f / k_2}{0.30 + 0.35\gamma} \quad (8)$$

$$k_3 = -\frac{0.70\sigma_t A_f}{0.30w_f - \sigma_t A_f / k_2} \quad (9)$$

$$k_4 = -\frac{(0.30 - \gamma)\sigma_t A_f}{0.70w_f} \quad (10)$$

Se observa que si  $K_2 \rightarrow \infty$  y  $\gamma \rightarrow 0$ , se recuperan los parámetros  $w_c$ ,  $k_3$  y  $k_4$  de la curva idealizada Figura 4(a), de la forma:

$$\lim_{(k_2 \rightarrow \infty)(\gamma \rightarrow 0)} w_f = 3.3333 \frac{G_F}{\sigma_t} = w_c \quad (11)$$

$$\lim_{(k_2 \rightarrow \infty)(\gamma \rightarrow 0)} k_3 = -0.7000 \frac{\sigma_t^2 A_f}{G_F} = \bar{k}_3 \quad (12)$$

$$\lim_{(k_2 \rightarrow \infty)(\gamma \rightarrow 0)} k_4 = -0.1286 \frac{\sigma_t^2 A_f}{G_F} = \bar{k}_4 \quad (13)$$

En consecuencia, la curva idealizada de ablandamiento utilizada en el modelo numérico propuesto en este artículo está definida por los puntos  $(w, \sigma) = (0, \sigma_t)$ ,  $(w_{ch}, 0.30 \sigma_t)$ ,  $(3.33w_{ch}, 0)$ , como lo muestra la Figura 2(b). Se observa una pequeña diferencia con respecto a la curva de ablandamiento bilineal dada por los puntos  $(w, \sigma) = (0, \sigma_t)$ ,  $(0.8w_{ch}, 0.33 \sigma_t)$ ,  $(3.60w_{ch}, 0)$ , obtenida analíticamente por Petersson (1981).

Las propiedades mecánicas de los resortes se derivan de las características de la curva de ablandamiento, como la resistencia a la tracción  $\sigma_t$  y la energía de fractura  $G_F$  del concreto.

## 5. Aplicación a vigas de concreto simple

El modelo constitutivo de fisura cohesiva descrito anteriormente se puede aplicar a elementos estructurales de concreto simple en los cuales la trayectoria de la fisura es conocida y el mecanismo de apertura de la misma corresponde al modo I. Los ejemplos de aplicación mostrados a continuación describen el comportamiento de tres vigas de concreto simplemente apoyadas de dimensiones diferentes, sometidas a una carga puntual en el centro de la luz, como lo ilustra la Figura 5(a). La sección transversal de las vigas es rectangular y tienen una entalla en la cara inferior del centro de la luz.

Cada simulación numérica con elementos finitos corresponde a un análisis no lineal estático en condición plana de esfuerzos, considerando deformaciones infinitesimales y aplicando un desplazamiento vertical incremental sobre la cara superior de la mitad de la luz de la viga. Así mismo, cada ejemplo de aplicación se modeló con varias mallas de elementos finitos bidimensionales. Estas simulaciones se realizaron con el programa comercial ANSYS (2005).

If  $K_2 \rightarrow \infty$  and  $\gamma \rightarrow 0$ , parameters,  $w_c$ ,  $k_3$  and  $k_4$  are recovered from idealized curve in Figure 4(a), as follows:

Consequently, idealized softening curve employed in the numerical model proposed in this paper is defined by points  $(w, \sigma) = (0, \sigma_t)$ ,  $(w_{ch}, 0.30 \sigma_t)$ ,  $(3.33w_{ch}, 0)$ , as shown in Figure 2(b). A small difference is observed in regards to the two-line softening curve given by points  $(w, \sigma) = (0, \sigma_t)$ ,  $(0.8w_{ch}, 0.33 \sigma_t)$ ,  $(3.60w_{ch}, 0)$ , analytically obtained by Petersson (1981).

Springs mechanical properties are derived from softening curve characteristics, such as concrete tensile strength  $\sigma_t$  and fracture energy  $G_F$ .

## 5. Application on plain concrete beams

The constitutive model of cohesive crack previously described may be applied to plain concrete structural elements, where crack path is known and its opening mechanism corresponds to mode I. Application examples shown below describe the behavior on three simply supported concrete beams with different dimensions, exposed to a concentrated load in the center span, as shown in Figure 5(a). Beams transverse section is rectangular and, they have a notch in center span lower side.

Each numerical simulation with finite element corresponds to a non-static linear analysis under flat stress conditions, considering infinitesimal strain and applying an increasing vertical displacement on the upper side of mid-span beam. In the same way, each application example was modeled by using several two-dimensional finite element meshes. Such simulations were developed with the commercial program ANSYS (2005).

La fuente de no linealidad del modelo está dada exclusivamente por el comportamiento elasto – plástico de los resortes que representan el proceso de fractura.

Las cantidades de interés derivadas de la simulación numérica fueron comparadas con los resultados experimentales y numéricos obtenidos por otros autores (Lotfi y Shing, 1995; Sancho et al., 2007; Alfaiate et al., 2003).

La primera viga de concreto simulada con el modelo propuesto y denominada V1, corresponde al mismo elemento estructural ensayado por Petersson (1981). La viga V1 tiene una longitud  $L=2.00\text{m}$ , profundidad de entalla  $c=0.10\text{m}$  y sección transversal de  $b=0.05\text{m}$  de base y  $h=0.20\text{m}$  de altura. El concreto cuenta con un módulo de elasticidad  $E=30\text{ GPa}$ , relación de Poisson  $\nu=0.15$ , energía de fractura  $G_F=115\text{N/m}$ , resistencia a la tracción  $\sigma_t = 3.33\text{MPa}$  y resistencia a la compresión aproximada  $\sigma_c = 33.3\text{MPa}$ .

Se realizaron cinco mallas de elementos finitos diferentes, en las cuales se dividió el dominio de la viga en elementos bidimensionales, conectados mediante nudos excepto en la línea de la fisura. La Figura 5(b) muestra la primera malla denominada V1E4-20, porque tiene 20 elementos finitos cuadriláteros de 4 nudos sobre la línea de fisura conectados entre sí por resortes, excepto en el nudo superior donde se aplica la carga puntual (Figura 6(a)) y en los nudos inferiores que hacen parte de la entalla (Figura 6(c)).

Non-linear source of the model is exclusively provided by the springs' elastic-plastic behavior representing fracture process.

Importance values derived from numerical simulation were compared to experimental and numeric results obtained by other authors (Lotfi and Shing, 1995; Sancho et al., 2007; Alfaiate et al., 2003).

The first concrete beam simulated with the proposed model and called V1, corresponds to the same structural element tested by Petersson (1981). V1 has  $L=2.00\text{m}$  length,  $c=0.10\text{m}$  notch depth and, transverse section is  $b=0.05\text{m}$  base and  $h=0.20\text{m}$  height. Concrete has an  $E=30\text{ GPa}$  elasticity module,  $\nu=0.15$  Poisson relation,  $G_F=115\text{N/m}$  energy fracture,  $\sigma_t = 3.33\text{MPa}$  tensile strength and approximate compressive strength.

Five different finite element meshes were developed, which beam domain was divided into two-dimensional beam elements connected by means of nodes, except for the crack line. Figure 5(b) shows the first mesh called V1E4-20, because it has 20 quadrilateral finite elements and 4 nodes on the crack line, which are connected each other by springs, except in the upper node where concentrated load is applied (Figure 6 (a)) and in lower nodes which are parts of the notch (Figure 6(c)).

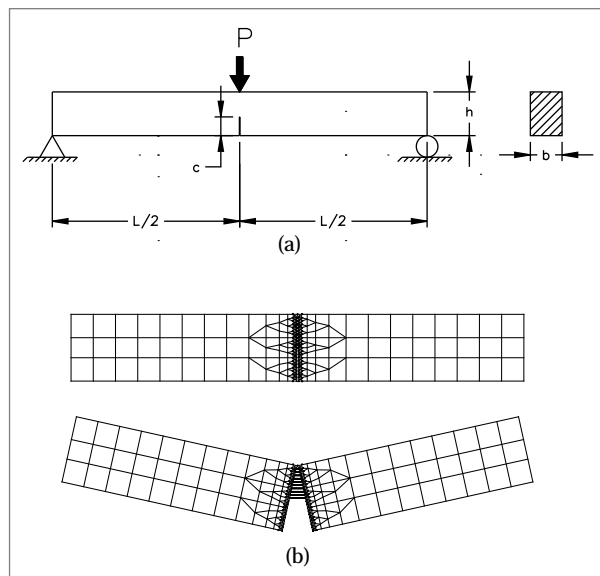


Figura 5. Vigas de concreto simple simplemente apoyadas con carga puntual en el centro de la luz: (a) esquema general, (b) malla de elementos finitos (Graffe 2010)

Figure 5. Plain concrete beams simply supported with concentrated load in the center span: (a) general overview, (b) finite elements mesh (Graffe 2010)

Particularmente en esta malla, la distribución de los nudos entre las caras de la fisura permite considerar que el área aferente es la misma para todos los resortes y en consecuencia la relación elasto – plástica entre la fuerza y el alargamiento de cada uno de ellos es común. Tal relación se define en la Figura 7, donde el tramo 1 – 2 representa plasticidad perfecta cuando el resorte está sometido a un esfuerzo negativo superior a su resistencia a la compresión. En cambio, los tramos 2 – 3 y 3 – 4 muestran una respuesta lineal elástica de pendiente muy alta, que tienden a un comportamiento rígido. El proceso de fractura está representado mediante el ablandamiento plástico del resorte mostrado en los tramos 4 – 5 y 5 – 6, el cual finaliza con la transmisión de una fuerza cohesiva muy baja en el tramo 6 – 7.

En la simulación se aplicaron 19 incrementos del desplazamiento vertical o deflexión en la mitad de la luz de 0.1mm cada uno hasta obtener una deflexión de 1.9mm.

La respuesta estructural de la viga se representa mediante la relación entre la carga externa puntual aplicada  $P$  y la deflexión en la mitad de la luz  $\delta$ . La Figura 8 indica dicho resultado en cada uno de los incrementos de  $\delta$ , donde se observa un comportamiento lineal elástico inicial limitado por una carga máxima, seguido de la reducción progresiva no lineal de la carga con el aumento de la deflexión que conserva como asíntota a  $P=0$ . La carga máxima calculada por el modelo numérico es 1.14 veces mayor que la obtenida en el ensayo experimental, debido a la baja densidad de elementos finitos en la zona de fractura.

In this particular mesh, nodes distribution between crack sides enables the consideration of the fact that afferent area is the same for all springs and, therefore, elastic – plastic relation between stress and elongation is common in each one of them. Such relation is defined in Figure 7, where segment 1-2 represents a perfect plasticity when the spring is exposed to a negative stress higher than its compressive strength. However, segments 2-3 and 3-4 show an elastic linear response with quite high slop, which tends to a stiff behavior. Fracture process is represented by spring’s plastic softening as shown in 4-5 and 5-6 segments, which end up with the transmission of cohesive force quite low in segment 6-7.

In the simulation 19 increases were applied for vertical displacement or strain in the mid span, each one of 0.1mm until reaching a 1.9mm deflection.

Beam structural response is represented by means of the applied external concentrated load  $P$  and mid-span deflection  $\delta$ . Figure 8 indicates such result for each  $\delta$  increment, where an initial elastic linear behavior limited by a maximum load is observed, followed by a load non-linear progressive reduction with deflection increase that maintains  $P=0$  as asymptote. Maximum load calculated by the numerical model is 1.14 times higher than the one obtained in the experimental trial, due to low density of finite elements in the fracture zone.

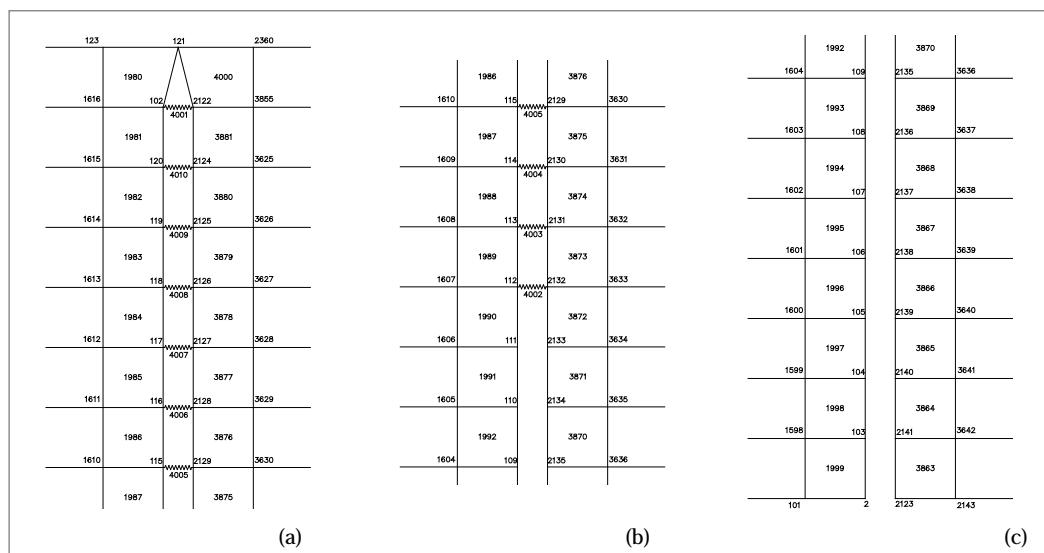


Figura 6. Detalle de la malla de elementos finitos en la zona de fractura: (a) tramo superior, (b) tramo intermedio y (c) tramo inferior  
 Figure 6. Detail of finite elements mesh in the fracture zone: (a) upper segment, (b) Intermediate segment and (c) lower segment



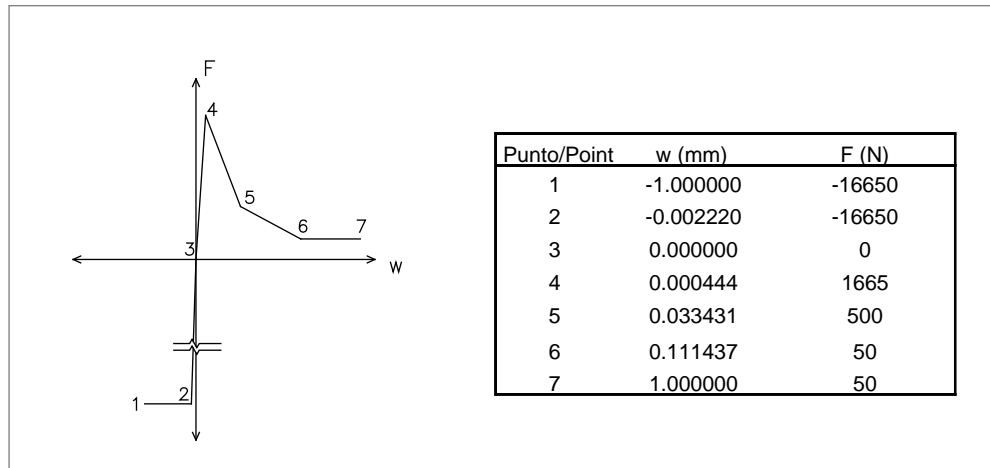


Figura 7. Relación Fuerza – alargamiento de los resortes: (a) gráfica, (b) tabla  
 Figure 7. Relation stress – elongation of springs: (a) graph, (b) table

La formación de una fisura real se representa en el modelo numérico como el conjunto de puntos donde los resortes han perdido su capacidad cohesiva, es decir, cuando la fuerza adquiere un valor casi nulo como lo indica el tramo 6 – 7 de la Figura 7. Por lo tanto la punta de fisura está ubicada contiguo al último punto cuyo resorte perdió la cohesión.

The formation of an actual crack is represented by the numerical model as the set of points where springs have lost their cohesive capacity, i.e., when stress acquires an almost void value, as depicted by 6-7 segment in Figure 7. Therefore the crack tip is placed next to the last point, which spring has already lost cohesion capacity.

Durante la aplicación del desplazamiento vertical en la simulación, el esfuerzo principal mayor  $\sigma_1$  se concentra en el interior de la zona de fractura y en su vecindad, más exactamente en la punta de la fisura. La Figura 9 presenta la distribución de  $\sigma_1$  cerca a la zona de fractura en una escala de colores fija para algunos de los estados de desplazamiento, indicados por los números mostrados en la Figura 8.

During the application of vertical displacement in the simulation, the major main stress  $\sigma_1$  is concentrated in the inner fracture zone and its surroundings, exactly in the crack tip. Figure 9 introduces  $\sigma_1$  distribution, close to fracture zone at a fixed color scale for some displacement states, indicated by numbers in Figure 8.

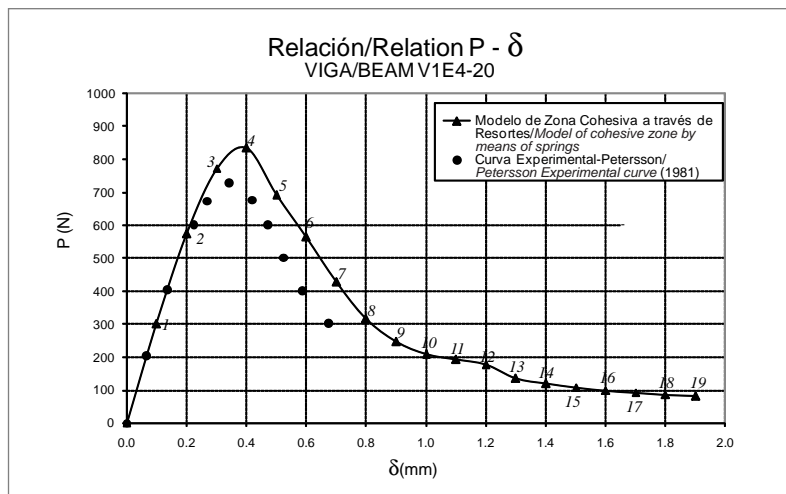


Figura 8. Relación entre la carga aplicada y la deflexión en la mitad de la luz obtenida de la simulación numérica V1E4-20  
 Figure 8. Relation between applied load and deflection in the mid-span obtained by numerical simulation V1E4-20





El estado 1 corresponde al comportamiento elástico de la viga con valores bajos de esfuerzo. En el estado 2 aparece una zona de esfuerzo máximo a tracción en el extremo de la entalla que se desplaza hacia arriba progresivamente en los estados 3 y 4. Dicho bulbo de concentración del esfuerzo es igual a la resistencia a tracción del concreto, e indica la posición de la punta de fisura en cada estado de desplazamiento. En los estados del 5 al 8, la pendiente de la curva fuerza – desplazamiento es negativa (Figura 8), mientras que la zona de esfuerzo máximo a tracción se acerca a la cara superior de la viga (Figura 9). Del estado 12 al 19, la carga resistente es muy baja y decrece suavemente, mostrando esfuerzos de tracción en toda la viga excepto en la cara superior, donde se conserva una pequeña zona de esfuerzo de compresión. En los estados finales se conserva una carga resistente aproximadamente constante igual al 11% de la carga máxima debido a que el modelo numérico no supone un límite de resistencia a compresión. En estos estados de esfuerzos la dirección del eje principal mayor se puede considerar paralela al eje x, lo cual asegura que los resortes están orientados adecuadamente.

La misma viga se simuló con cinco mallas de elementos finitos diferentes. Las mallas denominadas V1E4-10 y V1E4-20, cuentan con 10 y con 20 elementos bidimensionales cuadrilaterales de 4 nudos en la zona de fractura, respectivamente, como lo ilustra la Figura 10. En cambio, las mallas designadas como V1E8-20, V1E8-40 y V1E8-80, tienen 20, 40 y 80 elementos bidimensionales cuadrilaterales de 8 nudos en la zona de fractura, respectivamente.

State 1 corresponds to beam elastic behavior with low stress values. In state 2 a maximum tensile stress zone comes up in the notch end, which progressively displaces upwards in 3 and 4 states. Such stress concentration bulb base is equal to concrete tensile strength, and indicates the crack pin position for each displacement state. In states from 5 to 8, the stress – displacement curve slope is negative (Figure 8), while the maximum tensile stress zone is close to the upper beam side (Figure 9). From states 12 to 19, resistant load is quite low and decreases softly by showing tensile stressed in the whole beam except for the upper side, where still there is a compression strength small zone. In the final states a resistant load is kept constant approximately equal to 11% maximum load since the numerical model does not assume a compression strength limit. In such stress states main major axis direction can be considered as parallel to x axis, which confirms that springs are properly placed.

The same beam was simulated by means of five different finite element meshes. Meshes called V1E4-10 and V1E4-20 have 10 and 20 quadrilateral bidimensional elements with 4 nodes in the fracture zone, respectively as shown in Figure 10. However, meshes called V1E8-20, V1E8-40 and V1E8-80, have 20, 40 and 80 quadrilateral bidimensional elements with 8 nodes in the fracture zone, respectively.

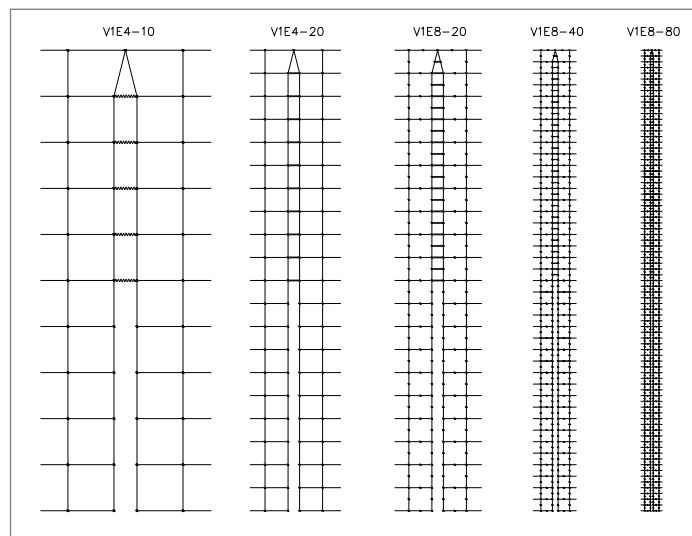


Figura 10. Detalle de las diferentes mallas de elementos finitos en la zona de fractura: (a) malla V1E4-10, (b) malla V1E4-20, (c) malla V1E8-20, (d) malla V1E8-40 y (e) malla V1E8-80

Figure 10. Detail of different finite element meshes in the fracture zone: (a) mesh V1E4-10, (b) mesh V1E4-20, (c) mesh V1E8-20, (d) mesh V1E8-40 and (e) mesh V1E8-80

La Figura 11 indica la respuesta estructural obtenida experimentalmente por Petersson (1981), calculada mediante el modelo numérico de fisura embebida presentado por Alfaiate et al. (2003), y conseguida mediante las diferentes mallas del modelo propuesto. A medida que la malla es más fina, se observa que la carga pico de la viga se acerca más al resultado experimental. Sin embargo, las mallas V1E4-20, V1E8-20, V1E8-40 y V1E8-80, es decir, con más de 20 elementos en la zona de fractura, muestran una respuesta estructural post - pico casi igual.

Figure 11 illustrates the structural response experimentally obtained by Petersson (1981); it was calculated by means of embedded crack numerical model introduced by Alfaiate et al. (2003) and obtained from different meshes in the proposed model. As long as mesh becomes finer, beam peak load gets closer to the experimental result. However, meshes V1E4-20, V1E8-20, V1E8-40 and V1E8-80 having more than 20 elements in the fracture zone show almost the same post peak structural response.

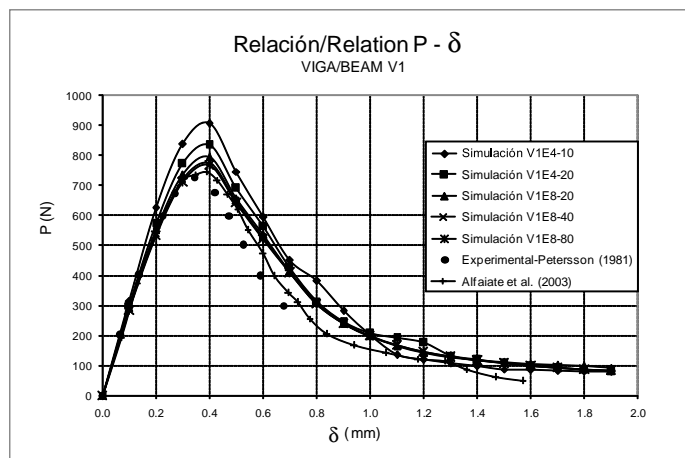


Figura 11. Relación entre la carga aplicada y la deflexión en la mitad de la luz de la viga V1, obtenidos de ensayos experimentales y simulaciones numéricas (Alfaiate et al., 2003)

Figure 11. Relation between applied load and deflection in beam mid-span V1, obtained from experimental trials and numeric simulations (Alfaiate et al. 2003)

La viga V2 tomada de los trabajos de Sancho et al. (2007), tiene una longitud  $L=2.00m$ , profundidad de entalla  $c=0.20m$  y sección transversal de  $b=0.10m$  de base y  $h=0.50m$  de altura. Las propiedades mecánicas del concreto definidas en la referencia son las siguientes: módulo de elasticidad  $E=20$  GPa, relación de Poisson  $\nu=0.15$ , energía de fractura  $G_F = 100N/m$  y resistencia a la tracción  $\sigma_t = 2.50MPa$ . Se aplicaron 19 incrementos del desplazamiento vertical en la mitad de la luz de  $0.05mm$  cada uno hasta obtener una deflexión de  $0.95mm$ .

La viga se simuló con cuatro mallas de elementos finitos diferentes. Las mallas denominadas V2E4-20 y V2E8-20, en la zona de fractura tienen 20 elementos bidimensionales cuadriláteros de 4 nudos y de 8 nudos, respectivamente. En cambio, las mallas designadas como V2E8-50 y V2E8-100 tienen 50 y 100 elementos bidimensionales cuadriláteros de 8 nudos en la zona de fractura.

Beam V2 taken from studies by Sancho et al. (2007) has  $L=2.00m$  length,  $c=0.20m$  notch depth, transverse section of  $b=0.10m$  base and  $h=0.50m$  height. Concrete mechanical properties defined in the reference are: elasticity mode  $E=20$  GPa, Poisson relation  $\nu=0.15$ , fracture energy  $G_F = 100N/m$  and tensile strength  $\sigma_t = 2.50MPa$ . In the mid-span 19 vertical displacements increases were applied, each one of  $0.05mm$  until reaching a  $0.95mm$  deflection.

Beam was simulated with four different finite element meshes. Meshes called V2E4-20 and V2E8-20 in the fracture zone have 20 quadrilateral two-dimensional elements with 4 nodes and 8 nodes, respectively. However, meshes called V2E8-50 and V2E8-100 have 50 and 100 quadrilateral two-dimensional elements with 8 nodes in the fracture zone.

La Figura 12 muestra la respuesta estructural obtenida de la simulación numérica realizada con modelos de fisura cohesiva presentados por Sancho y sus colaboradores (2007), y los calculados con diferentes mallas del modelo propuesto. Se observa que los resultados de las cuatro mallas son similares, con valores de carga un 4% mayor a la solución presentada por otros autores (Sancho et al., 2007).

Figure 12 illustrates the structural response obtained from numerical simulation developed with cohesive crack models introduced by Sancho and collaborators (2007), and calculations from different meshes in the proposed model. Results for four meshes are similar, with load values 4% higher than solution proposed by other authors (Sancho et al., 2007).

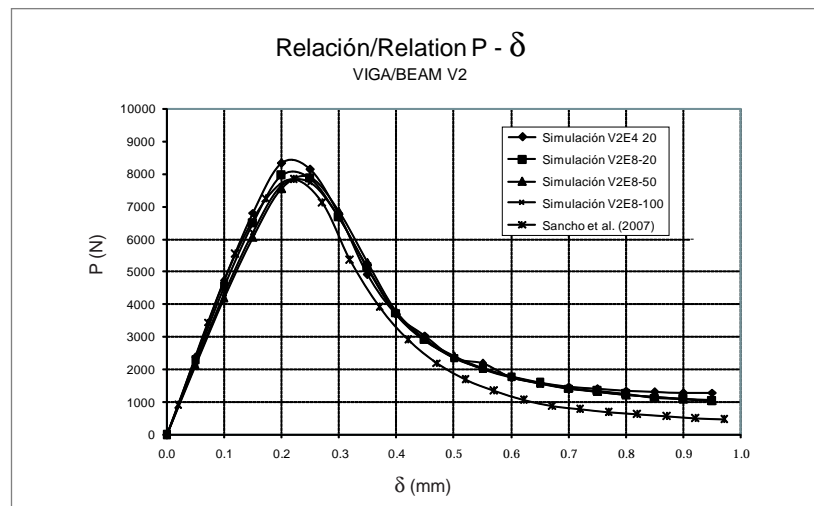


Figura 12. Relación entre la carga aplicada y la deflexión en la mitad de la luz de la viga V2, obtenidos de simulaciones numéricas con modelos de fisura cohesiva (Sancho et al., 2007)

Figure 12. Relation between applied load and deflection in beam mid-span V2, obtained from numerical simulations for cohesive crack models (Sancho et al. 2007)

La viga V3 tomada de los ensayos experimentales desarrollados por Kormeling y Reinhardt (1983), tiene una longitud  $L=0.45\text{m}$ , profundidad de entalla  $c=0.05\text{m}$  y sección transversal de  $b=0.10\text{m}$  de base y  $h=0.10\text{m}$  de altura. El concreto cuenta con un módulo de elasticidad  $E=20\text{ GPa}$ , relación de Poisson  $\nu = 0.20$ , energía de fractura  $G_F$  113N/m, resistencia a la tracción  $\sigma_t = 2.40\text{MPa}$  y resistencia a la compresión aproximada  $\sigma_c = 24.0\text{MPa}$ . Se aplicaron 19 incrementos del desplazamiento vertical en la mitad de la luz de 0.03mm cada uno hasta obtener una deflexión de 0.57mm.

La viga se simuló con cuatro mallas de elementos finitos diferentes. Las mallas denominadas V3E4-20 y V3E8-20, en la zona de fractura tienen 20 elementos bidimensionales cuadriláteros de 4 nudos y de 8 nudos, respectivamente. En cambio, las mallas designadas como V3E8-40 y V3E8-80 tienen 40 y 80 elementos bidimensionales cuadriláteros de 8 nudos en la zona de fractura.

Beam V3 taken from experimental trials developed by Kormeling and Reinhardt (1993) have  $L=0.45\text{m}$  length,  $c=0.05\text{m}$  notch depth and transverse section of  $b=0.10\text{m}$  base and  $h=0.10\text{m}$  height. Concrete has  $E=20$  elasticity module,  $\nu = 0.20$  Poisson relation,  $G_F$  113N/m fracture energy,  $\sigma_t = 2.40\text{MPa}$  tensile strength and  $\sigma_c = 24.0\text{MPa}$  approximate compressive strength. In the mid-span 19 vertical displacements increases were applied, each one 0.03mm until reaching a 0.57mm deflection.

Beam was simulated by means of four different finite elements meshes. Meshes called V3E4-20 and V3E8-20 in the fracture zone have 20 quadrilateral two-dimensional elements with 4 nodes and 8 nodes, respectively. However, meshes called V3E8-40 and V3E8-80 have 40 and 80 quadrilateral two-dimensional elements with 8 nodes in the fracture zone.

La Figura 13 muestra la respuesta estructural obtenida de los ensayos experimentales de Kormeling y Reinhardt (1983), del modelo de fisura embebida presentado por Lotfi y Shing (1995) y de las cuatro mallas del modelo propuesto. Se observa una fuerte coincidencia entre las curvas de las cuatro mallas, sin embargo, la carga máxima es aproximadamente un 5% más alta que el límite superior del valor experimental. Así mismo, el comportamiento post - pico del modelo propuesto se acerca al modelo numérico presentado por otros autores (Lotfi y Shing 1995) y muestra una carga mayor al resultado experimental.

Figure 13 illustrates the structural response obtained from experimental trials developed by Kormeling and Reinhardt (1993), from embedded crack model introduced by Lotfi and Shing (1995) and from the four meshes in the proposed model. A strong coincidence is noticeable between four meshes curves however; maximum load is approximately 5% higher than ultimate limit in the experimental value. In the same way, post-peak behavior in the proposed model get closer to the numeric model introduced by other authors (Lotfi and Shing 1995) and shows a higher load than experimental result.

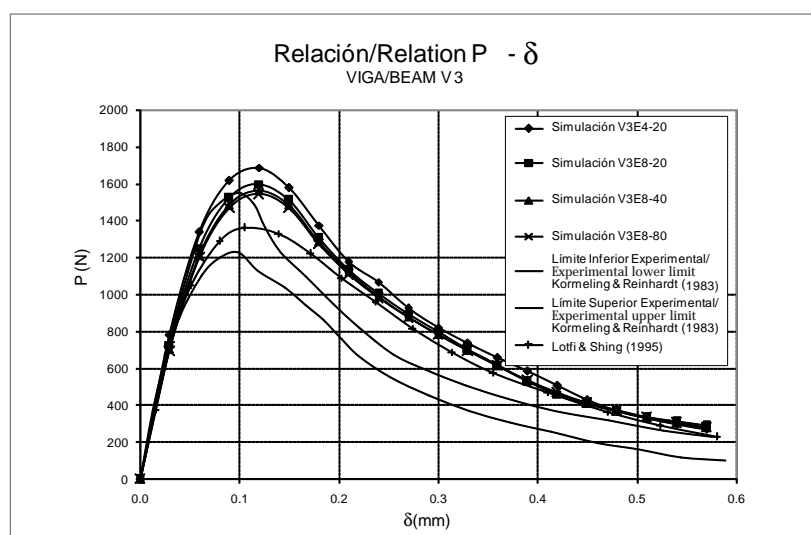


Figura 13. Relación entre la carga aplicada y la deflexión en la mitad de la luz de la viga V3, obtenidos de ensayos experimentales y simulaciones numéricas (Lotfi y Shing 1995)

Figure 13. Relation between applied load and deflection in mid-span beam V3, obtained from experimental trials and numerical simulations (Lotfi and Shing 1995)

## 6. Conclusiones

Como conclusión general se indica que la respuesta estructural de vigas de concreto simple con trayectoria de fisura conocida y mecanismo de apertura en modo I, se puede obtener aproximadamente mediante un modelo simplificado de fisura cohesiva discreta, en el cual el proceso de fractura se representa mediante resortes elasto - plásticos normales a la trayectoria de fisura, mientras que el resto de la estructura se representa con elementos bidimensionales elásticos. Cuando el esfuerzo principal mayor alcanza la resistencia del concreto a tracción, comienza el ablandamiento plástico de los resortes entre las caras de la fisura y la descarga elástica en los elementos finitos bidimensionales de la vecindad.

## 6. Conclusions

As general conclusion the structural behavior of plain concrete beams with known crack path and opening mechanism in mode I can be obtained by means of a discrete cohesive crack simplified model, where the fracture process is represented by means of elastic-plastic springs normal to crack path, while the rest of the structure is represented with two-dimensional elastic elements. When main stress reaches concrete tensile strength, springs plastic softening takes place between crack sides and elastic unload of two-dimensional finite elements in the surroundings.



La diferencia entre la respuesta estructural numérica y experimental puede producirse por el uso de valores típicos supuestos de algunas propiedades mecánicas del concreto en el modelo numérico.

Las propiedades mecánicas del concreto indispensables para describir el proceso de fractura con el modelo propuesto son: la energía de fractura, la resistencia a la tracción y la relación entre el esfuerzo cohesivo y la apertura de fisura. Esta última se puede describir adecuadamente con una curva bilineal.

En el modelo numérico de las vigas de concreto, la punta de la fisura se ubica en la vecindad del último resorte que tiene fuerza cohesiva nula. En este punto se observó un bulbo de concentración del esfuerzo principal mayor en los elementos finitos de concreto, el cual cambiaba con el aumento de la carga externa aplicada. Sin embargo, el ablandamiento definido en la zona de fractura obliga a que este esfuerzo sea igual o inferior a la resistencia a tracción del material.

En una viga simplemente apoyada con carga puntual en el centro de la luz, los resultados del análisis del proceso de fractura se acercan a la respuesta experimental cuando la altura del elemento finito bidimensional es menor a  $1/20$  de la altura total de la viga.

A diferencia de otros modelos de fisura cohesiva, este trabajo presenta una metodología simplificada aplicable directamente a programas comerciales de análisis no – lineal con elementos finitos que incluyan en su librería a elementos bidimensionales elásticos y elementos unidimensionales elasto – plásticos.

Esta metodología ofrece resultados satisfactorios de la simulación numérica de uno de los ensayos experimentales normalizados del proceso de fractura en modo I. Lo cual contribuye y asegura el desarrollo de futuros modelos más complejos que representen el comportamiento mecánico en estructuras de concreto simple con una o más fisuras de trayectoria desconocida.

Difference between numerical and experimental structural response may be explained by the use of supposed typical values in some mechanical properties of concrete in numerical model.

Indispensable concrete mechanical properties needed to describe fracture process by the proposed model are: fracture energy, tensile strength and relation between cohesive stress and crack opening. The latter may be properly described by a two-linear curve.

In the numerical model for concrete beams, crack tip is located in the last spring surrounding which has void cohesive strength. In this point a main major stress concentration bulb was observed for concrete finite elements, which was changing with the increase of external load applied. However, softening defined by fracture zone demands such stress be equal or lower than material tensile strength.

In a beam simply supported by concentrated load in the central span, analysis results from a fracture process are close to experimental response when two-dimensional finite element height is lower than  $1/20$  of total beam height.

Unlike other cohesive crack models, this study introduces a simplified methodology to be directly applied on commercial programs of non-linear analysis with finite elements to include two-dimensional elastic elements and unidimensional elastic plastic elements in their libraries.

Such methodology offers satisfactory results on numerical simulation for one of the regulated experimental results in fracture process in mode I. Therefore it contributes and ensures the development of further complex models representing mechanical behavior of plain concrete structures with one or more unknown cracks paths.

---

## 7. Referencias / References

- Alfaiate J., Simone A. y Sluys L. J. (2003), A new approach to strong embedded discontinuities. EURO-C Conference 2003 Computational Modelling of Concrete Structures'. St Johann im Pongau, Austria., Taylor and Francis.
- ANSYS (2005), Ansys 10.0. Release 10.0 ed. United States.
- Barenblatt G. (1962), The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, 7, 55-129.
- Bazant Z. y Planas J. (1998), *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*, CRC Press.
- CEB (1991), CEB-FIP Model Code 1990, Comité Euro-International du Béton.
- Dugdale D. (1960), Yielding of steel sheets containing slits. *Journal for Mechanics of Physics and Solids*, 8, 100-108.
- Graffe R. D. (2010), Simulación del proceso de fractura de vigas de concreto simple, mediante modelos de fisura cohesiva. Unidad de Posgrados. Facultad de Ingeniería Civil y Agrícola. Bogotá D.C., Universidad Nacional de Colombia.
- Hillerborg A., Modeer M. y Petersson P. E. (1976), Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and concrete research*, 6, 773-782.
- Hughes T. J. R. (2000), *The finite element method*, New York, Dover.
- Kormeling H. A. y Reinhardt H. W. (1983), Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. Delft University of Technology, Report 5-83-18.
- Lotfi H. R. y Shing P. B. (1995), Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38, 1307-1325.
- Oñate E. (2009), *Structural Analysis with the Finite Element Method*, CIMNE - Springer.
- Petersson P. E. (1981), Crack grown and development of fracture zone in plain concrete and similar materials. Lund, Swenden, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology.
- Rokugo K., Iwasa M., Suzuki T. y Koyanagi W. (1989), Testing methods to determine tensile strain softening curve and fracture energy of concrete. *Fracture Toughness and Fracture energy: Test Methods for Concrete and Rock*. Rotterdam, Balkema.
- Rots J. G. (1988), *Computational Modeling of Concrete Fracture*, University of Delf.
- Sancho J. M., Planas J., Cendón D., Reyes E. y Gálvez J. (2007), An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 74, 75-86.
- Shi Z. (2009), *Crack Analysis in Structural Concrete*, Burlington, USA, Butterworth-Heinemann Elsevier.