

# Metodología para caracterización de estructuras reticulares mediante datos de medición de vibración forzada

## A methodology for characterizing reticular structures using data from forced vibration measurement

Alejandro Ruiz Sibaja\*, Jorge López Ríos\*, José Martínez Jiménez\*\*

\* Universidad Autónoma de Chiapas, Chiapas, MÉXICO

\*\* Universidad de Córdoba, Córdoba, ESPAÑA

ruizsibaja@yahoo.es

Fecha de recepción: 04/06/2004  
Fecha de aceptación: 23/11/2004

### Resumen

Se presenta un modelo matemático para identificar las matrices dinámicas de rigidez y flexibilidad de estructuras reticulares a partir de datos de mediciones de vibración forzada. En el planteamiento se considera que el comportamiento del sistema estructural es lineal, elástico y no amortiguado. La definición de las matrices dinámicas de rigidez y flexibilidad se consigue al identificar mediante mediciones de vibración: la matriz modal, las frecuencias naturales de vibración y la frecuencia de excitación. Es necesario proponer la matriz de masas del sistema por no haber sido posible deducirla experimentalmente en esta etapa de la investigación. Se muestra la aplicación de la metodología desarrollada a un modelo estructural sencillo y se comentan los resultados obtenidos.

Palabras Clave: Caracterización, mediciones, vibración, rigidez, flexibilidad

### Abstract

A mathematical model to identify the dynamic matrices of rigidity and flexibility of reticular structures starting from data of forced vibration measurement is presented. In the proposition it is considered that the behavior of the structural system is linear, elastic and not buffered. The definition of the dynamic matrices of rigidity and flexibility is possible when identifying by means of vibration measurement: the modal matrix, the natural frequencies of vibration and the driving force frequency. It is necessary to propose the system's masses matrix due to the fact that has not been possible to deduce it experimentally in this stage of the investigation. The application of the developed methodology to a simple structural model is shown and the obtained results are commented.

Keywords: Characterization, measurements, vibration, stiffness, flexibility

## 1. Introducción

En general los sistemas estructurales están sometidos a cargas que varían en el tiempo tal como las que se originan por viento, oleaje, sismos y maquinaria. El efecto de estas cargas sobre la estructura origina una respuesta dinámica que es de suma importancia para el ingeniero diseñador debido a que la respuesta dinámica puede exceder a la respuesta estática en un factor significativo.

El gran avance de la computación como ayuda de cálculo ha permitido el desarrollo de numerosos modelos matemáticos para analizar el comportamiento dinámico de las estructuras reticulares. Sin embargo, la complejidad de estos sistemas hace necesario confirmar y mejorar estos modelos mediante técnicas experimentales. La utilización de métodos para identificación de sistemas

permite que los resultados experimentales puedan usarse para definir con mejor precisión sus características dinámicas y calibrar sus modelos matemáticos.

Debido a la importancia de la infraestructura industrial para la economía de México se ha hecho necesario el desarrollar algunas metodologías para la determinación de las características dinámicas de estructuras sometidas a carga de maquinaria. Entre estas metodologías destacan aquellas que se basan en el análisis de la señal de vibración en el dominio de la frecuencia. A partir de estas metodologías es posible evaluar el comportamiento dinámico de las estructuras industriales para contar con una estimación realista de los parámetros dinámicos que caracterizan al sistema estructural y con base en ello determinar las fuerzas dinámicas

generalizadas que actúan sobre la estructura en condiciones de operación.

En este trabajo se desarrolla una metodología para utilizar los resultados de mediciones de vibración efectuadas directamente en campo y a partir de estos datos hacer predicciones del comportamiento de estructuras sometidas a vibración forzada.

## 2. Identificación del sistema estructural

### 2.1 Análisis de señales

Mediante un análisis en el dominio de la frecuencia es posible determinar el sentido y la interdependencia estadística de los movimientos de una estructura (Goldman, 1999). Para tal fin es necesario estudiar estos movimientos en varios puntos en las frecuencias de resonancia del sistema (Espinoza Barreras, 1999). El procedimiento experimental consiste en analizar dos señales simultáneamente, en donde uno de los acelerómetros se coloca como referencia mientras que el otro se sitúa en puntos estratégicos sobre la estructura con el propósito de definir mejor el modo que se pretende medir.

Como primer paso se evalúa la Transformada Finita de Fourier de la señal (empleando el algoritmo conocido como Transformada Rápida de Fourier) mediante la siguiente expresión (Brigham, 1997):

$$x(f) = \int x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (1)$$

En esta expresión  $x(t)$  es la señal registrada,  $t$  define la ventana de medición,  $j$  es  $(-1)^z$  y  $f$  es la frecuencia de análisis. La Ecuación 1 define la forma en que una señal se distribuye con la frecuencia. Si al resultado de esta expresión se le calcula su módulo y se eleva al cuadrado se obtiene el espectro de potencia de  $x(t)$ .

Por otra parte, durante el proceso de medición se pueden registrar varias señales simultáneamente, por lo que se puede calcular su función de correlación cruzada, esto es:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int x(t)y(t+\tau)dt \quad (2)$$

En la Relación 2,  $y(t+\tau)$  representa otra de las señales registradas siendo  $\tau$  un tiempo de retraso. Esta función permite estimar en qué orden una señal se correlaciona con otra, en qué medida las señales fueron originadas por la misma fuente y con qué retraso, y

detectar la presencia de ruido o señales extrañas. Cuando la Ecuación 2 se aplica sobre la misma señal se obtiene la función de autocorrelación:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int x(t)x(t+\tau)dt \quad (3)$$

Utilizando el concepto de Transformada Finita de Fourier, Ecuación 1, en las Ecuaciones 2 y 3, se obtienen:

$$F_{xx}(f) = \int R_{xx}(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (4)$$

$$F_{xy}(f) = \int R_{xy}(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (5)$$

Las Expresiones 4 y 5 son, respectivamente, las transformadas de las funciones de correlación y autocorrelación. Una aplicación de la función  $F_{xy}(f)$  consiste en el cálculo del ángulo de fase entre las componentes imaginaria y real de una señal. Este ángulo se define de la siguiente manera:

$$\theta_{xy}(f) = \tan^{-1} \left( \frac{Q_{xy}(f)}{C_{xy}(f)} \right) \quad (6)$$

En donde  $Q_{xy}(f)$  y  $C_{xy}(f)$  representan respectivamente las partes imaginaria y real de  $F_{xy}(f)$ . La interpretación física de este concepto se basa en el hecho de que para cada frecuencia natural, la función de transferencia de fase correspondiente (relación de fase entre ambas señales) es cercana a 0 o 180 grados.

Las transformadas de las funciones de correlación y autocorrelación resultan de utilidad en el cálculo de las funciones de coherencia y transferencia:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|F_{xy}(f)|^2}{F_{xx}(f)F_{yy}(f)} \quad (7)$$

$$H_{xy}(f) = \frac{F_{yy}(f)}{F_{xx}(f)} \quad (8)$$

En estas expresiones  $\gamma_{xy}(f)$  es la función de coherencia,  $H_{xy}(f)$  es la función de transferencia y  $F_{yy}(f)$  denota la transformada de la función de autocorrelación

de la señal  $y(t)$ . La principal utilidad de la función de coherencia radica en que proporciona una medida del grado de linealidad entre dos señales. Los valores de esta función van de 0 a 1. Cuando se alcanza el valor de 1 se dice que existe una perfecta relación lineal entre ambas señales.

## 2.2 Determinación de parámetros estructurales

La principal utilidad de los conceptos descritos, dentro de un contexto de análisis dinámico estructural, radica en la estimación de las frecuencias y modos naturales de vibración que corresponden a los sistemas analizados. Para ello se procede de la siguiente manera:

- De los espectros de potencia,  $|x(f)|^2$ , se determinan las frecuencias en las cuales se generan los picos más grandes. Un pico está asociado a un valor máximo de  $|x(f)|^2$ . Estos picos representan estimaciones preliminares de las frecuencias naturales de vibración.
- Se calculan las Transformadas Finitas de Fourier de las funciones de correlación entre dos señales registradas para una misma medición. A estas transformadas se les obtiene su módulo y se eleva al cuadrado. Los resultados se dibujan en función de la frecuencia. En estas figuras se detectan los valores de frecuencia en que ocurren los picos o valores máximos de  $|F_{xy}(f)|^2$ . Aquellos que coincidan con los detectados en el inciso anterior se podrán considerar como asociados a las frecuencias naturales de vibración.
- Se obtiene la función de Transferencia de Fase entre las señales utilizadas en el inciso (b) y se dibujan en función de la frecuencia. Para aquellos valores detectados como frecuencias naturales de vibración se obtiene la magnitud de la Función de Transferencia de Fase. De acuerdo con ello se define el modo dominante de vibración (lateral, vertical, torsional) asociado a la frecuencia pico.
- Se dibujan las Funciones de Coherencia entre las señales analizadas con el objeto de estimar la magnitud de los posibles ruidos registrados durante el proceso de medición de las señales.
- Conocidas las frecuencias de interés, se procede a calcular la forma relativa de los modos de vibración con ayuda de la expresión (Bendat y Piersol, 1961):

$$\varphi_i(y_i) = \sqrt{F_{y_i y_i}(f_i)} \quad (9)$$

Donde  $F_{y_i y_i}$  es la transformada de la función de autocorrelación para la frecuencia  $f_i$  asociada al punto

de medición  $j$ . Esta última expresión equivale a dibujar el espectro de potencia, para el modo de interés, en diferentes puntos de medición de la estructura. ( $y_j$ ) y después unir los picos que correspondan a las frecuencias naturales detectadas ( $f_i$ ).

## 2.3 Matriz dinámica de flexibilidad

En este apartado se desarrolla un modelo para determinar la matriz dinámica de flexibilidad de una estructura reticular sometida a vibración forzada. Se acepta que el sistema estructural es lineal, elástico y no amortiguado. En consecuencia, por definición de modo de vibración (Clough y Penzien, 1975):

$$([K] - p_i^2 [M])\{U_i\} = \{0\} \quad (10)$$

En donde  $[K]$  es la matriz estática de rigidez,  $p_i$  es la frecuencia natural de vibración ( $p_i = 2\pi f$ ),  $[M]$  es la matriz de masas,  $\{U_i\}$  es el vector modal asociado a  $p_i$ . A partir de la Expresión 10 puede demostrarse que (Ruiz Sibaja, 1991):

$$\{U_i\}^T [K] \{U_i\} = p_i^2 \{U_i\}^T [M] \{U_i\} \quad (11)$$

Por otra parte para una estructura sometida a vibración forzada la Ecuación de movimiento es (Paz, 1997):

$$([K] - \omega^2 [M])\{x_0\} = \{F_0\} \quad (12)$$

En la Expresión 12  $\{x_0\}$  es el vector de amplitudes de desplazamiento,  $\omega$  es la frecuencia de excitación y  $\{F_0\}$  es el vector de amplitudes de la carga de excitación. La amplitud de la respuesta dinámica se obtiene como (Clough y Penzien, 1975):

$$\{x_0\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \{U_i\} \quad (13)$$

En la cual  $\alpha_i$  es la amplitud modal y  $\{U_i\}$  el vector modal. Al sustituir la Ecuación 13 en la Ecuación 12 y considerar la Ecuación 11 se obtiene la expresión para la amplitud modal (Ruiz Sibaja, 1991):

$$\alpha_i = \frac{\{U_i\}^T \{F_0\}}{\{U_i\}^T [M] \{U_i\} (p_i^2 - \omega^2)} \quad (14)$$

Al incorporar la Ecuación 14 en la Ecuación 13 resulta:

$$\{x_0\} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(p_i^2 - \omega^2)} \frac{1}{\{U_i\}^T [M] \{U_i\}} \{U_i\} \{U_i\}^T \{F_0\} \quad (15)$$

Se establecen las siguientes definiciones:

$$B_i = p_i^2 - \omega^2 \quad (16)$$

$$\Omega_i = \{U_i\}^T [M] \{U_i\} \quad (17)$$

Se obtiene, a partir de la Ecuación 15, la expresión para la matriz dinámica de flexibilidad:

$$[F_{din}] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{B_i \Omega_i} \{U_i\} \{U_i\}^T \quad (18)$$

En esta expresión es necesario conocer la frecuencia de excitación, la frecuencia natural de vibración y los vectores modales para determinar la matriz dinámica de flexibilidad de una estructura reticular,  $[F_{din}]$ .

#### 2.4 Matriz dinámica de rigidez

A partir de la Ecuación 13 se puede demostrar que (Ruiz Sibaja, 1991):

$$\{U_i\}^T [M] \{x_0\} = \alpha_i \{U_i\}^T [M] \{U_i\} \quad (19)$$

En esta expresión puede incorporarse la expresión para la amplitud modal, Ecuación 14, de lo cual resulta:

$$\{U_i\}^T [M] \{x_0\} = \frac{\{U_i\}^T \{F_0\}}{(p_i^2 - \omega^2)} \quad (20)$$

Que también puede escribirse:

$$B_i \{U_i\}^T [M] \{x_0\} = \{U_i\}^T \{F_0\} \quad (21)$$

Al premultiplicar por  $[M]$  y luego por  $\{U\}$  la Ecuación 21 puede llevarse a la forma (Ruiz Sibaja, 1991):

$$[M] \{U_i\} (\Omega_i)^{-1} B_i \{U_i\}^T [M] \{x_0\} = \{F_0\} \quad (22)$$

E incorporando la Ecuación 12 en la Ecuación 22 y considerando la participación de todos los modos de vibración resulta:

$$\sum_{i=1}^n [M] \{U_i\} (\Omega_i)^{-1} B_i \{U_i\}^T [M] = [K - \omega^2 M] \quad (23)$$

Finalmente:

$$[K_{din}] = \sum_{i=1}^n [M] \{U_i\} (\Omega_i)^{-1} B_i \{U_i\}^T [M] \quad (24)$$

Mediante la Ecuación 24 se puede obtener la matriz dinámica de rigidez,  $[K_{din}]$ , de una estructura reticular. Al igual que en la Ecuación 18 es necesario conocer la frecuencia de excitación, la frecuencia natural de vibración, la matriz de masas y los vectores modales para determinar  $[K_{din}]$ .

### 3. Calibración del modelo desarrollado

#### 3.1 Modos de vibración medidos

A fin de realizar una calibración preliminar del modelo desarrollado previamente, se llevaron a cabo pruebas de vibración forzada sobre una viga de acero doblemente articulada (Figura 1). Esta viga, además de su propio peso, carga cinco pesos concentrados también de acero. La vibración forzada de la viga se consiguió mediante un motor eléctrico de 117 V, el cual hace girar un vástago con un peso de 20 grs. concentrado en el extremo del mismo. En la prueba inicial la frecuencia de excitación se estableció en 12.20 Hz.

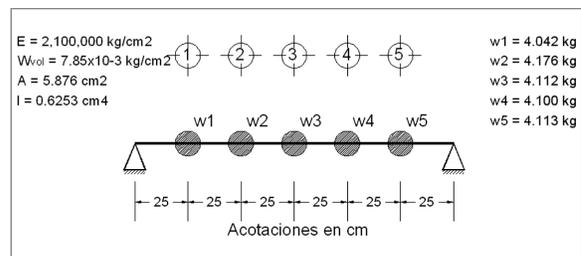


Figura 1. Modelo estructural experimental

Se utilizó un equipo de medición a base de dos acelerómetros piezoeléctricos y un analizador de espectros con dos canales de entrada. Los acelerómetros utilizados tienen una gama muy extensa de frecuencias (de 1 a 1000 Hz) y muy buena linealidad en todas ellas (Endevco, 1971). Estos acelerómetros se conectaron a cables blindados para enviar la señal de vibración al analizador

de espectros. El analizador que se usó cubre el intervalo de frecuencias de 0.02 Hz a 25 KHz. (Hewlett Packard, 1979). A la señal registrada en cada uno de los acelerómetros se le hizo un muestreo y se procesó mediante un filtro digital antes de almacenarla en la memoria del aparato. Estos datos almacenados en la memoria se analizaron mediante la Transformada Rápida de Fourier.

El procedimiento de medición consistió en analizar dos señales simultáneamente. Uno de los acelerómetros se colocó fijo como referencia (canal A), mientras que el otro se situó en puntos estratégicos sobre la viga (canal B), con el fin de definir la respuesta dinámica a medir.

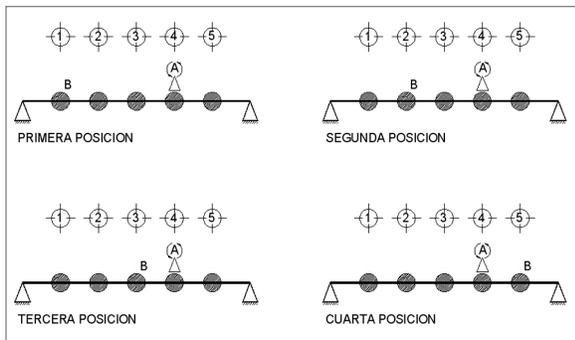


Figura 2. Posiciones de medición de los acelerómetros

De esta manera se seleccionaron cuatro posiciones diferentes de los acelerómetros (Figura 2), para realizar series de mediciones sobre la viga de acero. En las Figuras 3 y 4 se muestran, para la primera posición de medición, los espectros de transferencia de fase y de coherencia en el dominio de la frecuencia, en el intervalo de 0 a 100 Hz, después de efectuar 32 promedios RMS. En todos los casos se tomó como referencia el acelerómetro del canal A.

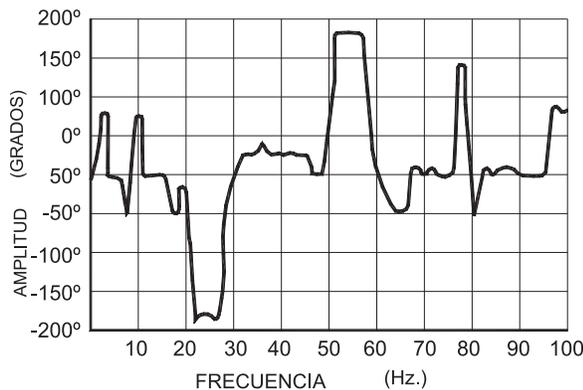


Figura 3. Función de transferencia de fase para la primera posición de medición

Se observa que en los 6 Hz el valor de la función de transferencia de fase (Figura 3) es cercano a  $0^\circ$  ( $-4^\circ$ ), lo cual indica que las señales de los canales A y B están en fase en esa frecuencia. Además el valor de la función de coherencia (Figura 4) cercano a 1.0 (0.94) señala que se trata de la misma respuesta dinámica (en este caso el primer modo de vibración).

En 24.10 Hz el valor de la función de transferencia de fase (Figura 3) es de  $180^\circ$ , indicando así que la señal registrada por el acelerómetro del canal B está desfasada en  $180^\circ$  con respecto a la señal del canal A. El valor de 0.93 de la función de coherencia (Figura 4) confirma que se trata del segundo modo de vibración.

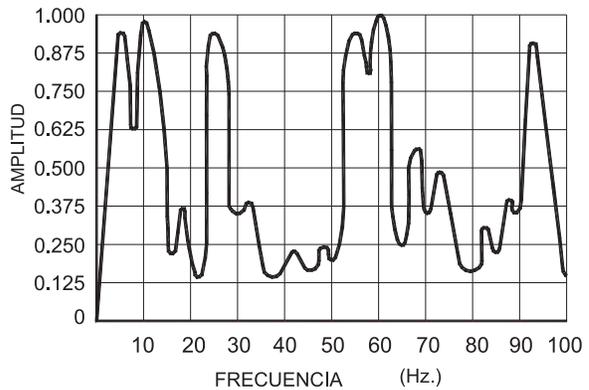


Figura 4. Función de coherencia para la primera posición de medición

En la Tabla 1 se resumen los valores obtenidos, a partir de los espectros en el dominio de la frecuencia, para los cinco primeros modos de vibración que pudieron medirse en la viga. De acuerdo con los datos de la Tabla 1 se pueden formar los vectores característicos que corresponden a los modos de vibración de la estructura, esto se consigue al considerar las amplitudes registradas en cada posición y el comportamiento de las funciones de transferencia de fase y de coherencia.

### 3.2 Matriz dinámica de flexibilidad medida

En la Figura 1 se resumen las características geométricas y de material del modelo estructural experimental utilizado durante las pruebas de vibración forzada. De acuerdo con los datos de esta figura se calculó una matriz teórica de masas concentradas (Ecuación 29). Mediante la aplicación de la Ecuación 18 se obtuvo la matriz dinámica de flexibilidad medida. En el cálculo se consideró la participación de los modos medidos de vibración 1, 2, 3, 4 y 5 y de la matriz de masas teórica, el resultado se muestra en la Ecuación 25:

Tabla 1. Resumen de resultados de mediciones de vibración

Frecuencia (Hz)	Amplitud (mV)		Transferencia Amplitud	Transferencia Fase	Coherencia
	Canal A	Canal B			
<b>Primera Posición</b>					
6.00	15.40	8.79	0.571	-4°	0.94
12.20*	29.86	31.63	1.059	0°	0.98
24.10	10.22	9.37	0.917	-180°	0.93
54.60	1.29	20.16	15.625	182°	0.92
93.40	8.44	7.74	0.917	-9°	0.90
133.80	8.52	5.00	0.587	165°	0.76
<b>Segunda Posición</b>					
6.00	15.40	15.49	1.006	-4°	0.98
12.20*	29.86	49.94	1.672	2°	0.97
24.10	10.22	10.31	1.009	-183°	0.91
54.60	1.29	1.29	1.000	-175°	0.91
93.40	8.44	7.82	0.927	-171°	0.88
133.80	8.52	8.25	0.968	11°	0.74
<b>Tercera Posición</b>					
6.00	15.40	17.66	1.147	-3°	0.99
12.20*	29.86	46.90	1.571	2°	0.98
24.10	10.22	0.63	0.062	183°	0.91
54.60	1.29	20.96	16.250	-6°	0.91
93.40	8.44	0.54	0.064	170°	0.87
133.80	8.52	9.76	1.145	167°	0.76
<b>Cuarta Posición</b>					
6.00	15.40	8.82	0.573	4°	0.99
12.20*	29.86	22.98	0.770	1°	0.98
24.10	10.22	9.35	0.915	3°	0.92
54.60	1.29	18.14	14.063	-171°	0.88
93.40	8.44	7.72	0.915	-170°	0.88
133.80	8.52	4.82	0.566	166°	0.76

\* frecuencia de excitación

$$[F_{din}]_{1,2,3,4,5} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{bmatrix} -0.264 & -4.387 & -9.306 & -11.058 & -7.039 \\ & -9.475 & -15.383 & -17.424 & -11.059 \\ & & -16.731 & -15.698 & -9.658 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & -9.357 & -4.503 \\ & & & & -0.444 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \times 10^{-3} \end{matrix} \quad (25)$$

La norma Frobenius de esta matriz es:

$$\| [F_{din}]_{1,2,3,4,5} \|_2 = \sqrt{\sum f_{ij}^2} = 5.530 \times 10^{-2} \quad (26)$$

### 3.3 Matriz dinámica de rigidez medida

Mediante la aplicación de la expresión 24 se obtiene, considerando la participación de los modos

medidos de vibración 1, 2, 3, 4 y 5 y de la matriz de masas teórica:

$$[K_{din}]_{1,2,3,4,5} = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \begin{bmatrix} 746.728 & -739.631 & 303.722 & -100.454 & 40.133 \\ & 1095.434 & -834.956 & 333.080 & -83.104 \\ & & 1155.042 & -877.672 & 353.329 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & 1159.323 & -783.481 \\ & & & & 722.416 \end{bmatrix} \end{matrix} \\ \end{matrix} \quad (27)$$

Cuya norma Frobenius es:

$$\| [K_{din}]_{1,2,3,4,5} \|_2 = \sqrt{\sum k_{ij}^2} = 3302.933 \quad (28)$$

3.4 Matrices de flexibilidad y rigidez teóricas

Se llevó a cabo el análisis modal del modelo estructural para encontrar las frecuencias naturales teóricas de vibración. De esta manera se obtuvieron los modos naturales de vibración cuyas frecuencias respectivas son  $p_1 = 6.172$  Hz,  $p_2 = 24.698$  Hz,  $p_3 = 55.355$  Hz,  $p_4 = 95.664$  Hz y  $p_5 = 136.678$  Hz. Al considerar la matriz de masas teórica (Ecuación 29), los modos de vibración y sus frecuencias, se obtuvieron las matrices dinámicas de flexibilidad y rigidez teóricas,  $[F'_{din}]$  y  $[K'_{din}]$ .

A estas matrices se les calculó la norma Frobenius para comparar el resultado contra lo que se presenta en las Ecuaciones 26 y 28. En las Ecuaciones 29 y 30, se muestran los valores obtenidos para  $\| [F'_{din}] \|_2$  y  $\| [K'_{din}] \|_2$ , respectivamente.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4.120 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.257 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.192 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.179 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.193 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (29)$$

$$\| [F'_{din}]_{1,2,3,4,5} \|_2 = \sqrt{\sum f_{ij}^2} = 5.607 \times 10^{-2} \quad (30)$$

$$\| [K'_{din}]_{1,2,3,4,5} \|_2 = \sqrt{\sum k_{ij}^2} = 3447.673 \quad (31)$$

Al comparar los valores dados en las Ecuaciones 26 y 28 ( $\| [F_{din}] \|_2$  y  $\| [K_{din}] \|_2$ ), contra lo que se presenta en las Ecuaciones 30 y 32 ( $\| [F'_{din}] \|_2$  y  $\| [K'_{din}] \|_2$ ) se observa una buena aproximación entre lo que se obtiene mediante mediciones de vibración forzada y lo pronosticado por la teoría.

3.5 Comportamiento del modelo para diferentes frecuencias de excitación

Para realizar una calibración más amplia del modelo de análisis propuesto se estudió su respuesta ante diferentes frecuencias de excitación. Se aplicaron seis diferentes frecuencias de excitación:  $\omega_1 = 76.655$  rad/seg,  $\omega_2 = 219.597$  rad/seg,  $\omega_3 = 439.195$  rad/seg,  $\omega_4 = 658.792$  rad/seg,  $\omega_5 = 878.389$  rad/seg y  $\omega_6 = 1097.987$  rad/seg. Para cada prueba de vibración forzada se obtuvieron las matrices  $[F_{din}]$  y  $[K_{din}]$ , es decir, se determinaron seis matrices  $[F_{din}]$  y seis matrices  $[K_{din}]$ . Se calculó la norma Frobenius para cada una de estas matrices y los valores obtenidos se escalan respecto de los mayores valores calculados para  $\| [F_{din}] \|_2$  y  $\| [K_{din}] \|_2$ ,

respectivamente, de forma tal que se fijó una escala horizontal entre 0 y 1.

En la Figura 5 se muestra el comportamiento en función de la participación modal, de la norma  $\| [F_{din}] \|_2$  escalada, para diferentes frecuencias de excitación.

A partir de la Figura 5 pueden considerarse los siguientes intervalos de comportamiento de  $\| [F_{din}] \|_2$ :

$$0 < \omega_i < \frac{1}{4}(p_1 + p_5) \quad (32)$$

$$\frac{1}{4}(p_1 + p_5) < \omega_i < \frac{3}{4}(p_1 + p_5) \quad (33)$$

$$\frac{3}{4}(p_1 + p_5) < \omega_i < \frac{5}{4}(p_1 + p_5) \quad (34)$$

Para el primer intervalo se observa que  $\| [F_{din}] \|_2$  tiende a mantenerse constante a partir de la participación del 60% de la matriz modal (los tres primeros modos de vibración). Esto significa que para este intervalo de excitación, la definición de  $[F_{din}]$  no presenta variaciones apreciables a partir de la participación del tercer modo de vibración. En el segundo intervalo, el comportamiento de  $\| [F_{din}] \|_2$  tiende a mantenerse constante a partir de la participación del 80% de la matriz modal, es decir, que se requiere de los cuatro primeros modos de vibración para que la definición de  $[F_{din}]$  no presente variaciones notorias. Conforme la frecuencia de excitación incursiona hacia valores superiores se hace necesaria la participación del 100% de la matriz modal, esto se advierte en el tercer intervalo, en el cual se necesitan de los cinco modos de vibración para que  $[F_{din}]$  alcance una buena definición.

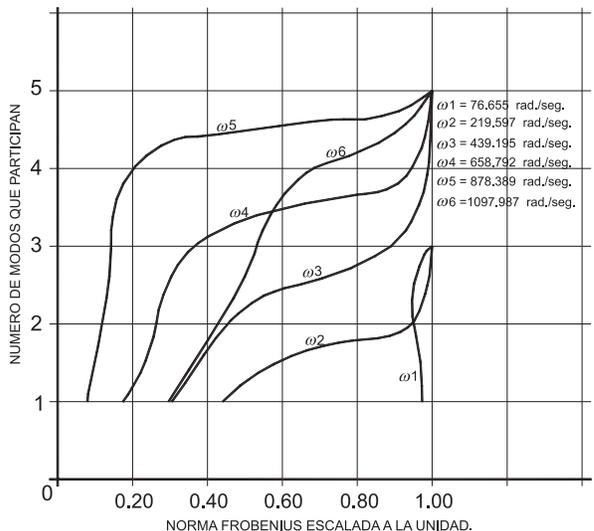


Figura 5. Comportamiento de  $\| [F_{din}] \|_2$  para diferentes frecuencias de excitación

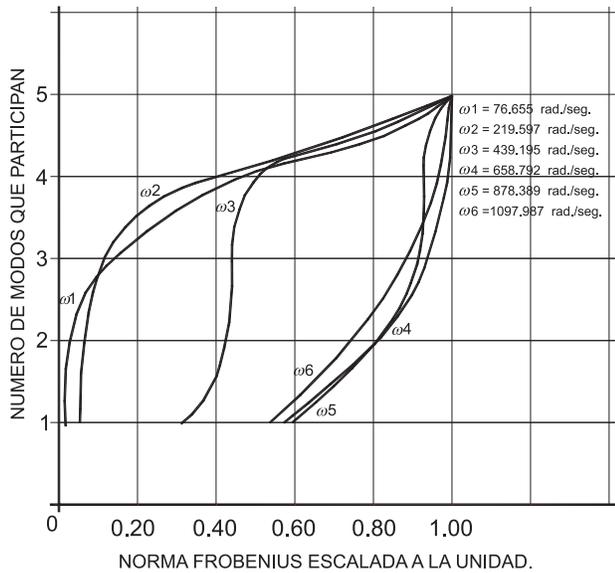


Figura 6. Comportamiento de  $\| [K_{din}] \|_2$  para diferentes frecuencias de excitación

En la Figura 6 se muestra el comportamiento en función de la participación modal, de la norma  $\| [K_{din}] \|_2$  escalada, para diferentes frecuencias de excitación. Pueden considerarse los siguientes intervalos de comportamiento de  $\| [K_{din}] \|_2$ :

$$0 < \omega_i < \frac{3}{4}(p_1 + p_5) \quad (35)$$

$$\frac{3}{4}(p_1 + p_5) < \omega_i < \frac{5}{4}(p_1 + p_5) \quad (36)$$

Para el primer intervalo, se advierte que es necesario contar con la participación del 100% de la matriz modal para alcanzar una buena definición de  $[K_{din}]$ . En el segundo intervalo, el comportamiento de  $\| [K_{din}] \|_2$  se mantiene casi constante a partir de la participación del 80% de la matriz modal, por lo tanto, sólo se necesitan cuatro modos de vibración para que la definición de  $[K_{din}]$  no presente variaciones apreciables.

#### 4. Resultados de identificación modal utilizando otras metodologías

La metodología que se presenta en este trabajo se basa en la identificación modal mediante el análisis en el dominio de la frecuencia de la respuesta dinámica de una estructura sometida a vibración forzada. Es

necesario determinar los modos de vibración y sus frecuencias asociadas para definir al sistema estructural. Si se obtienen suficientes datos a partir de una prueba de vibración forzada, se puede obtener la descripción de las características dinámicas de una estructura (Ruiz Sibaja, 1991; Wah Luk, 1981).

A partir de la segunda mitad del siglo XX se han desarrollado distintas aproximaciones para modelar una estructura con base en mediciones de vibración. El volumen de investigación obtenido desde entonces ha permitido caracterizar a los distintos tipos de estructuras estudiadas así como llevar a cabo un seguimiento de su integridad.

Se han registrado las frecuencias naturales de vibración de estructuras reticulares a partir de mediciones de vibración ambiental, al mismo tiempo, se ha intentado detectar y observar los cambios en los valores de estas frecuencias. La mayoría de las investigaciones se han apoyado en la respuesta estructural ante excitación ambiental (Espinoza Barreras, 1999; Ruhl, 1976; Rodríguez Cuevas, 1986; González Alcorta, 1989; King Revelo et al., 1990).

Las aceleraciones medidas en un sitio de la estructura pueden proporcionar varias frecuencias de vibración, y generalmente basta con realizar mediciones en unas cuantas posiciones para evaluar las frecuencias de los modos excitados y para identificar sus formas modales (Espinoza Barreras, 1999).

En general, las mediciones de vibración ambiental se han concentrado en determinar los modos inferiores de vibración (Begg et al., 1976; Cruz Gómez, 1989; Loland y Dodds, 1976). La metodología se ha apoyado en mediciones tomadas en el nivel más alto y en los niveles intermedios de estructuras urbanas y costa afuera. Esto se debe en parte al hecho de que en la mayoría de estas estructuras la vibración ambiental excita estos modos, y las aceleraciones (así como los desplazamientos y velocidades) que resultan de las vibraciones fundamentales son mayores en el nivel más alto, el cual es el nivel más adecuado para tomar mediciones.

También se ha intentado obtener e identificar frecuencias modales superiores (Espinoza Barreras, 1999; King Revelo et al., 1990). Se han desarrollado modelos matemáticos junto con estos estudios y se han refinado para correlacionarlos mejor con las observaciones. Estos modelos de cálculo han servido como el medio principal para evaluar en forma cuantitativa los cambios en la frecuencia de elementos estructurales importantes para la integridad del sistema. En otros trabajos se ha prestado

atención al registro de frecuencias locales (Gundy et al., 1980; Kenley y Dodds, 1980; Rodríguez Cuevas y Quaas Weppen, 1980), un área en donde todavía existe un amplio campo de investigación.

Se ha hecho poco trabajo de investigación para el empleo cuantitativo de la información de los modos medidos de vibración en pruebas de vibración ambiental. El método descrito por Burke et al., (1980) hace uso de la matriz de correlación cruzada y de las funciones de densidad espectral (las cuales pueden obtenerse a partir de mediciones de datos aleatorios ante excitación ambiental). La técnica permite obtener información cuantitativa sobre las formas modales en las frecuencias en donde ocurren los picos de respuesta. Sin embargo surgen algunas dificultades cuando los modos de vibración están cercanamente espaciados o cuando dos de ellos tienen contribuciones importantes a la respuesta dinámica de la estructura.

Hasta este momento no se han investigado los efectos del daño estructural sobre las propiedades dinámicas obtenidas en pruebas de vibración ambiental (Espinoza Barreras, 1999). La información registrada sólo se ha utilizado para propósitos de identificación modal, es conveniente entonces superar este rezago para identificar, entre otras cosas, la magnitud de los cambios cuantitativos en los modos de vibración cuando ocurre daño estructural. Al mismo tiempo es necesario determinar si ocurren variaciones relativamente importantes en las propiedades dinámicas debidas a otros fenómenos, independientes del daño, tales como alteración en la masa del sistema estructural. En consecuencia esta aplicación de las mediciones de vibración ambiental es importante y debe realizarse trabajo de investigación en esta dirección.

La metodología que aquí se presenta es aplicable a la interpretación de resultados de mediciones de vibración efectuadas directamente sobre una estructura sometida a vibración forzada. A través de estas mediciones se intenta mejorar el modelo de análisis tradicional de una estructura de forma que se consiga una mejor aproximación a la realidad física del problema. La identificación modal se realiza de manera semejante a la que se menciona en el trabajo de González Alcorta (1989). Sin embargo se intenta extraer una mayor cantidad de información a partir de los modos identificados tal como lo propone Ruiz Sibaja (1991).

Los resultados que se presentan son alentadores, pues se logró la identificación de un mayor número de modos que en los trabajos reportados por otros autores. Esto permitió una buena definición de las matrices

dinámicas de flexibilidad y rigidez del sistema estructural. Si bien, es preciso tener presente que las mediciones se han realizado en laboratorio bajo condiciones controladas. Seguramente la aplicación a estructuras en condiciones reales de trabajo requerirá de ajustes.

## 5. Conclusiones

Se presentó una metodología para deducir las matrices dinámicas de flexibilidad y rigidez a partir de datos de mediciones de vibración forzada. En esta etapa de la investigación, es necesario proponer la matriz de masas del sistema por no haber sido posible deducirla experimentalmente. Aunque el estudio de un modelo de laboratorio con cinco masas concentradas no justifica una generalización, los resultados obtenidos con la metodología propuesta muestran que es posible determinar, con una aproximación adecuada, las matrices dinámicas de flexibilidad y rigidez, para estructuras sometidas a vibración forzada.

En las pruebas realizadas lograron identificarse cinco modos de vibración en flexión del modelo estructural experimental. Las calibraciones del modelo matemático muestran que se obtiene una mejor definición de  $[F_{din}]$  cuando la frecuencia de excitación se encuentra en la vecindad de las primeras frecuencias naturales de vibración. Por el contrario, se observó una mejor aproximación hacia  $[K_{din}]$  cuando la frecuencia de excitación incursiona en el intervalo de las frecuencias naturales de vibración superiores. Los resultados obtenidos muestran, en general, que puede obtenerse una buena aproximación de  $[F_{din}]$  cuando se conoce el 60% de la matriz modal. En cambio, la definición de  $[K_{din}]$  requiere del conocimiento del 80% de la matriz modal. Se advirtió una gran similitud entre lo que se obtiene mediante mediciones de vibración forzada y lo pronosticado por la teoría, probablemente porque se trata de una estructura sencilla.

## 6. Referencias

- Begg R. D., Mackenzie A. C., Dodds C. J., y Loland O. (1975), *Structural integrity monitoring using digital processing of vibration signals*, Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 2549, Houston, Texas, Volumen I, pags. 104-114.
- Bendat J. S. y Piersol A. G. (1971), *Random data: Analysis and measurements procedures*, Wiley Interscience, 594 pags.
- Brigham E. O. (1997), *Fast Fourier Transform and its*

- applications*, Prentice Hall, 448 pags.
- Burke B. G., Sundararajan C., y Safaie F. M. (1980), *Characterization of ambient vibration data by response shape vectors*, *Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 3862, Houston, Texas, Volumen I*, pags. 64-72.
- Clough R. W., y Penzien J., (1975), *Dynamics of structures*, McGraw Hill, 768 pags.
- Cruz Gómez E. (1989), *Características dinámicas de las estructuras de mampostería*, Tesis de grado, DEPF-UNAM, México, D. F., México, 170 pags.
- Endevco division of Becton, Dickinson and Company, (1971), *Vibration computer*, Endevco, 5 pags.
- Espinoza Barreras F. (1999), *Determinación de las características dinámicas de estructuras*, Tesis de Doctorado, Departamento de Ingeniería de Terreno, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España, 170 pags.
- Goldman S. (1999), *Vibration spectrum analysis: a practical approach*, Industrial Press, 331 pag.
- González Alcorta R. (1989), *Cinemática del movimiento en edificios de la ciudad de México*, Tesis de grado, DEPF-UNAM, México, D. F., México, 160 pags.
- Gundy W. E., Scharton T. D., y Thomas R. L. (1980), *Damping measurements on an offshore platform*, *Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 3863, Houston, Texas, Volumen II*, pags. 220-231.
- Hewlett Packard (1979), *Operating manual model 3582A spectrum analyzer*, Hewlett Packard, 200 pag.
- Kenley R. M. y Dodds C. J. (1980), *Detection of damage by structural response measurements*, *Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 3866, Houston, Texas, Volumen I*, pags. 90-100.
- King Revelo C., Gómez Martínez R., Muriá Vila D., y Alvarez Guillén C. (1990), *Puente Tampico: pruebas de vibración y estimación de propiedades dinámicas*, *Revista de Construcción y Tecnología*, México, pags. 8-16.
- Loland O. y Dodds C. J. (1976), *Experiences in developing and operating integrity monitoring systems in the north sea*, *Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 2551, Houston, Texas, Volumen II*, pags. 154-163.
- Paz M. (1997), *Structural dynamics: theory and computation*, Kluwer Academic Publishers, 840 pag.
- Rodríguez Cuevas N. (1986), *Análisis experimental de vibraciones en edificios*, *Memorias del V congreso nacional de ingeniería estructural*, Veracruz, Veracruz, México, Volumen I, pags. 75-83.
- Rodríguez Cuevas N. y Quaas Weppen R. (1990), *Respuesta estructural de un edificio instrumentado en la ciudad de México durante sismos recientes*, *Instrumentación sísmica y uso de elementos disipadores de energía en el comportamiento estructural*, Seminario internacional, editado por: Neftalí Rodríguez Cuevas y Víctor M. Pavón, SMIS, México, D. F., México, pags. 18-26.
- Ruhl J. A. (1976), *Offshore platforms: observed behavior and comparison with theory*, *Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 2553, Houston, Texas, Volumen II*, pags. 114-123.
- Ruiz Sibaja A. (1991), *Análisis y síntesis dinámicos de estructuras costa afuera sujetas a carga de maquinaria reciprocante*, Tesis de Maestría, SEPI-ESIA-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, México, D. F., México, 185 pags.
- Wah Luk Y. (1981), *System modeling and modification via modal analysis*, *Doctoral these*, Virginia Polytechnic Institute, U. S. A., 120 pags.