

**Aviso CAP**

# Aviso RMI

# Influencia de la resistencia de los hormigones en la cuantía mínima de refuerzo transversal en vigas

## Influence of concrete strength in the minimum shear reinforcement ratio of beams

Sergio González García\*, Ibrahim Abd El Malik Shehata\*\*, Lidia Domingues Shehata\*\*\*

\* Universidade Estadual do Norte Fluminense, LECIV, BRASIL

\*\* Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil, Cidade Universitária, BRASIL

\*\*\* Universidade Federal Fluminense, Centro Tecnológico, Escola de Engenharia, Sao Domingos, BRASIL  
liluiser@uenf.br

Fecha de recepción: 25/ 02/ 2005  
Fecha de aceptación: 16/ 05/ 2005  
PAG. 103 - 114

### Resumen

La rotura en de las vigas armadas con poca cantidad de refuerzo es de forma frágil, debido a la rotura del acero después que ocurre la fisuración del hormigón. En este sentido, para eliminar este problema, los procedimientos o normas para el diseño y cálculo de estructuras de hormigón armado recomiendan fórmulas para calcular la cantidad mínima de refuerzo longitudinal y transversal. Tal refuerzo tiene la función de resistir las cargas después de las primeras fisuras, impidiendo que la rotura de la viga sea de forma frágil y sí con cierta ductilidad. Las fórmulas se basan principalmente en estudios empíricos, y cuando son analizadas por normas diferentes, estas llevan a valores muy diferentes de cuantía mínima de refuerzo, principalmente para hormigones de alta resistencia. Este artículo muestra una investigación teórica - experimental con el objetivo de determinar la cuantía mínima de refuerzo transversal en vigas de hormigón con diferentes resistencia a compresión, donde son comparadas las fórmulas de diferentes autores y normas; son mostrados los resultados de ensayos de catorce vigas de sección transversal rectangular, con armadura transversal aproximadamente en el rango de variación de las obtenidas de las ecuaciones de cuantía mínima propuestas en la literatura. Son discutidos cuales serían los procedimientos y fórmulas más correctas para determinar la cuantía mínima de refuerzo transversal de cortante en vigas.

Palabras clave: Ductilidad de vigas, hormigón de alta resistencia, cuantía mínima de cortante

### Abstract

Lightly reinforced concrete beams fail in a brittle manner, due to steel fracture soon after cracking of concrete. In order to avoid such a brittle failure and provide certain ductility at failure, codes of practice give formulae for minimum longitudinal and transverse reinforcement. This reinforcement is meant to resist loads beyond the first crack load and ensure that failure occur after the formation of several small cracks, improving the ductility of the beams. These design criteria are based mainly on empirical studies, and different code formulae lead to quite different amounts of minimum reinforcement, particularly for high strength concrete beams. In this work a theoretical and experimental investigation for the determination of the minimum shear steel ratio of concrete beams with different strength, having compared the formulae of different authors and code design is presented. The experimental program included tests on fourteen beams: seven of those were made of high strength concrete while the others seven had normal strength. Most of these beams had shear reinforcement in the wide range of variation of the minimum reinforcement proposed in the literature. It is also discussed which procedure would be the more appropriate for the determination of minimum shear steel ratio.

Keywords: Beam ductility, high strength concrete, minimum shear steel ratio

## 1. Introducción

La forma de falla de las vigas de hormigón armado depende de las características del hormigón y acero usadas en ellas, dimensiones, tipo de carga, del diseño y distribución del refuerzo, siendo deseable que sea de tipo dúctil.

Con el desarrollo de los hormigones de alta resistencia, que por sus características, llevan a los

elementos fabricados con este hormigón a tener comportamiento diferenciado con relación a los hormigones de baja resistencia, llevando a modificaciones en los métodos de cálculo.

Las vigas esbeltas con relación luz de cortante/altura efectiva  $(a/d) \geq 3$  -para cargas concentradas o relación luz/altura efectiva  $(L/d) \geq 12$  -para carga

distribuida sin refuerzo transversal, debido a sobrecargas no esperadas, llevan a una rápida formación de fisuras de cortante y consecuentemente a la rotura de la viga de forma imprevista. La cuantía mínima de refuerzo transversal visa dar una cierta reserva de resistencia a las vigas, así que ocurra la fisuración diagonal.

## 2. Análisis sobre cuantía mínima de refuerzo de cortante

El refuerzo transversal mínimo aquí analizado es definido como la cantidad de refuerzo transversal necesario para que la viga no presente rotura frágil, cuando la fuerza cortante alcance un valor igual al cortante de fisuración ( $V_{cr}$ ).

### 2.1 Análisis basado en la fuerza cortante de fisuración diagonal y plano de rotura asumido

En vigas esbeltas sin fuerza axial, de sección transversal rectangular, con distribución elástica de esfuerzos cortantes (parábola de segunda orden) en el inicio de la fisuración diagonal con ordenada máxima  $\tau_{max}=f_{ct}$ , la fuerza cortante asociada al inicio de la fisuración diagonal es obtenida por:

$$V_{cr} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot b_w \cdot h \cdot \tau_{max} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot b_w \cdot h \cdot f_{ct} \quad (1)$$

donde:  $b_w$  es el menor ancho de la sección a lo largo del peralte efectivo,  $h$  es la altura total de la sección y  $f_{ct}$  es la resistencia a la tracción del hormigón.

Cuando existe una fuerza normal provocando tensiones de compresión igual a  $\sigma_{cp}$  (considerada positiva), la tensión máxima de cortante correspondiente a la fisuración diagonal, de acuerdo con el criterio de rotura de Mohr - Coulomb modificado, es:

$$\tau_{max} = \sqrt{(f_{ct}^2 + f_{ct} \cdot \sigma_{cp})} \quad (2)$$

y la fuerza cortante de fisuración es, por tanto,

$$V_{cr} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot b_w \cdot h \cdot \sqrt{(f_{ct}^2 + f_{ct} \cdot \sigma_{cp})} \quad (3)$$

Dado que, en ambos casos, al alcanzarse  $V_{cr}$ , la rotura de la viga por cortante es inminente y brusca, con pérdida total de resistencia, es importante que la viga tenga un refuerzo transversal mínimo para dar a ésta cierta ductilidad. Considerándose el plano de rotura de la viga por cortante a un ángulo  $\theta_u$  con el eje de ésta y

estribos a  $90^\circ$  con este eje, la condición de equilibrio de fuerzas lleva al área mínima de estribos en la longitud ( $h \cot \theta_u$ ):

$$A_{sw,min} \cdot f_{yw} = \rho_{sw,min} \cdot b_w \cdot h \cdot \cot \theta_u = V_{cr} \quad (4)$$

o

$$\rho_{sw,min} = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{f_{ct}}{f_{yw}} \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_{cp}}{f_{ct}}\right)} \cdot \operatorname{tg} \theta_u \quad (5)$$

donde:  $A_{sw,min}$  es el área de refuerzo transversal mínimo,  $\rho_{sw,min}$  es la cuantía geométrica mínima de refuerzo transversal =  $A_{sw,min}/(s \cdot b_w)$  y  $f_{yw}$  es la resistencia de fluencia del refuerzo transversal.

El ángulo del plano de rotura ( $\theta_u$ ) normalmente varía entre  $20^\circ$  y  $45^\circ$ , tendiendo a ser menor para menores cuantías de refuerzo transversal. Para el caso de refuerzo transversal mínimo, se puede por tanto, considerar  $\theta_u=20^\circ$ , teniendo entonces,

$$\rho_{sw,min} = 0,24 \cdot \frac{f_{ct}}{f_{yw}} \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma_{cp}}{f_{ct}}\right)} \quad (6)$$

Si  $\sigma_{cp}=0$ ,

$$\rho_{sw,min} = 0,24 \cdot \frac{f_{ct}}{f_{yw}} \quad (7)$$

En el caso de vigas pretensadas con cables inclinados, la cuantía mínima de refuerzo transversal puede ser reducida considerando la componente vertical de las fuerzas de pretensado ( $V_p$ ), o sea,

$$A_{sw,min} \cdot f_{yw} = V_{cr} - V_p \quad (8)$$

y, por tanto,

$$\rho_{sw,min} = \frac{V_{cr} - V_p}{b_w \cdot h \cdot f_{yw} \cdot \cot \theta_u} \geq 0 \quad (9)$$

El análisis realizado anteriormente es válido para las vigas en que la fisuración diagonal ocurre en la región donde no hay fisuras de flexión, es el caso de vigas con pretensado total. Caso que no será analizado en este trabajo.

En vigas de sección transversal rectangular sin fuerza normal y sin refuerzo transversal, los resultados de ensayos mostraron que la fisura diagonal que causa la rotura se forma a partir de una fisura de flexión, para

una fuerza cortante menor que la dada por la fórmula 1.

El mecanismo de formación de esa fisura diagonal es complejo, envolviendo el aumento de las dimensiones de la fisura de flexión y el efecto de pino del refuerzo de flexión.

Se sabe que los principales parámetros que influyen en la fuerza cortante de fisuración diagonal son: las dimensiones de la sección transversal, la cuantía de refuerzo longitudinal de tracción ( $\rho$ ) y las propiedades del hormigón. En vigas esbeltas, la relación (MV/d) para la sección tiene mucha influencia y generalmente no es considerada en las fórmulas empíricas propuestas en la literatura para evaluar la fuerza cortante de fisuración diagonal.

Como evidenciaron los ensayos de vigas realizados con hormigón de diferentes resistencias, revisado por Castro (1997) y Queiróz (1999), el valor de  $V_{cr}/b_w d f_{ct}$  disminuye con el aumento de  $f_c$  y  $d$ , y aumenta con el aumento de la cuantía de refuerzo longitudinal de tracción ( $\rho$ ). Estos resultados mostraron además que, para las vigas con alturas superiores a 300mm, la influencia del parámetro  $d$  no es tan relevante. También en el trabajo realizado por Queiróz (1999), fue evidenciada una considerable reducción de la influencia de la altura de las vigas, cuando estas tenían algún refuerzo transversal.

A partir de los resultados de ensayos de vigas sin refuerzo transversal analizados por Queiróz (1999), se constató que se puede admitir que en vigas con fisuración de flexión, con pequeña cuantía de refuerzo longitudinal (caso de las vigas con refuerzo transversal mínimo), el valor de  $V_{cr}$  es alrededor de 40% del obtenido usando la fórmula 1.

## 2.2 Análisis basado en el modelo de celosía

Realizada una analogía del comportamiento de una viga sin refuerzo transversal con el de una celosía con diagonales comprimidas, formando un ángulo  $\theta$  con el eje de la viga, y la fuerza de tracción diagonal siendo resistida por el hormigón, el cual forma un ángulo  $\alpha$  con ese eje; se determinó la siguiente ecuación para la tensión de tracción correspondiente a la fuerza cortante de fisuración diagonal:

$$\sigma_{ct} = \frac{V_{cr}}{b_w z (\cot\theta + \cot\alpha) \text{sen}^2\alpha} = v f_{ct} \quad (10)$$

donde:  $v$  es el coeficiente de efectividad de la resistencia del hormigón y  $z$  es la distancia entre los centros de gravedad del acero en tracción y bloque comprimido del hormigón.

Considerando que la dirección de la tracción diagonal es ortogonal a la compresión diagonal, y que  $\theta$  es también el ángulo del plano de rotura con el eje de la viga, desde las fórmulas 4 y 10 se llega a:

$$V_{cr} = v f_{ct} b_w z \cot\theta = \rho_{sw, \min} f_{yw} b_w h \cot\theta \quad (11)$$

y admitiendo  $v = 2/3$  y  $z \approx 0,8h$ , desde la fórmula 11, se obtiene

$$\rho_{sw, \min} = 0,5 \cdot \frac{f_{ct}}{f_{yw}} \quad (12)$$

La fórmula 12, diferente de la fórmula 6, no tiene en cuenta la influencia de la fuerza normal, ya que, en el análisis por celosía, la fuerza axial afecta solamente las fuerzas en los cordones superior y inferior.

## 3. Cuantía mínima de refuerzo transversal para vigas con fisuración de flexión

### 3.1 Cuantía mínima de refuerzo transversal considerando el cortante de fisuración diagonal

En Shehata et al., 2000 y Shehata et al., 2003 fue determinada la cuantía mínima de refuerzo transversal; a partir de la fórmula 6, con  $\sigma_{cp}=0$  y multiplicando la fórmula 12 por el factor de 0,4 obtenido en Queiróz (1999), y usando la resistencia a la tracción ( $f_{ct}$ ) de la fórmula 13 de la norma CEB-FIP Model Code 1990 (1991), fueron obtenidas las fórmulas 14 y 15 de cuantía mínima de refuerzo transversal.

$$f_{ct} = 0,3f_{ck}^{0,67} \quad (13)$$

donde:  $f_{ck}$  es la resistencia a la compresión característica del hormigón.

Se llega a:

$$\rho_{sw, \min} = 0,029 \cdot \frac{f_{ck}^{0,67}}{f_{yw}} \quad (14)$$

$$\rho_{sw, \min} = 0,06 \cdot \frac{f_{ck}^{0,67}}{f_{yw}} \quad (15)$$

### 3.2 Cuantía mínima de refuerzo transversal considerando el modelo de celosía

En Queiróz (1999) se obtuvo una ecuación para la cuantía mínima de refuerzo transversal teniendo como base el modelo de celosía y considerando que después

de la fisuración diagonal crítica, el cortante es resistido apenas por el refuerzo transversal, constituido por estribos perpendiculares al eje de la viga.

$$V_{cr} = A_{sw,min} \cdot f_{yw} \cdot \frac{z \cdot \cot \theta}{s} \quad (16)$$

$$\tau_{wcr} = \frac{A_{sw,min}}{b_w \cdot s} \cdot f_{yw} \cdot \frac{z}{d} \cot \theta \quad (17)$$

admitiéndose que  $\frac{z}{d} = 0,91$  y para  $\theta$  el valor de  $25^\circ$ , se obtiene

$$\rho_{sw,min} = 0,5 \cdot \frac{\tau_{wcr}}{f_{yw}} \quad (18)$$

donde:  $\tau_{wcr}$  es la tensión de cortante nominal de fisuración.

Adoptándose para  $\tau_{wcr}$  el valor medio obtenido en Queiróz (1999) del análisis de resultados de ensayos de vigas esbeltas sin estribos y con peralte efectivo mayor que 300mm, igual a  $0,328 f_{ct}$ , y  $f_{ct}$  dado por la fórmula 13 se obtiene la siguiente ecuación:

$$\rho_{sw,min} = 0,049 \cdot \frac{\sqrt[3]{f_{ck}^2}}{f_{ywk}} \quad (19)$$

donde:  $f_{ywk}$  es la resistencia de fluencia característica del refuerzo transversal.

#### 4. Cuantía mínima de refuerzo transversal recomendada por algunas normas

En la tabla 1 son presentadas las ecuaciones de  $\rho_{sw,min}$  indicadas por algunas normas que son aplicables para  $f_{ck} > 50\text{MPa}$  y para el caso de estribos perpendiculares al eje de las vigas.

La figura 1 muestra una comparación del término  $\rho_{sw,min} f_{yw}$  en función de  $f_c$  de las fórmulas presentadas en la tabla 1 y las fórmulas 14, 15 y 19, y en la figura 2, las vigas ensayadas referenciadas a este término. Esta comparación muestra que particularmente para valores altos de  $f_c$ , existe una gran diferencia entre los valores recomendados de  $\rho_{sw,min} f_{yw}$  y que la norma CEB-FIP Model Code 1990 (1991) y la fórmula 15 son las que proponen mayores valores de  $\rho_{sw,min} f_{yw}$ . La norma ACI 318-99 (1999) para  $f_c < 69\text{MPa}$ , la norma CSA-A23.3 94 (1995) y la fórmula 14 son las que proponen menores valores de  $\rho_{sw,min} f_{yw}$ .

Las figuras 1 y 2 muestran que tres de las vigas ensayadas tenían valores de cuantía geométrica del refuerzo transversal ( $\rho_{sw} f_{yw}$ ) superiores a los de  $\rho_{sw,min} f_{yw}$  recomendados por normas (vigas 2, 4 y 9). Las demás vigas tenían valores de  $\rho_{sw} f_{yw}$  entre los mínimos y máximos propuestos.

Tabla 1. Valores de  $\rho_{sw,min}$  según algunas normas

Normas	$\rho_{sw,min}$
CEB-FIP Model Code 1990 (1991)	$0,2 \cdot f_{ctm} / f_{ywk}$ , $f_{ctm} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$
NS 3473E-92 (1992)	$\frac{0,2 \cdot f_{tk}}{f_{ywk}} \geq \frac{0,51}{f_{ywk}}$ $f_{tk} = 0,343 \cdot f_{ck}^{0,6}$ para $f_{ck} \leq 44 \text{ MPa}$ $f_{tk} = 0,3 \cdot (f_{ck} + 11)^{0,6}$ para $f_{ck} \geq 44 \text{ MPa}$
ACI 318-99 (1999)	Cuando $V > 0,5 V_c$ $\frac{0,345}{f_{yw}}$ para $f_c \leq 69 \text{ MPa}$ $\frac{0,01 \cdot f_c}{f_{yw}}$ para $f_c > 69 \text{ MPa}$ , no necesitando ser mayor que $1,035 / f_{yw}$
CSA A23.3-94 (1995)	Cuando $V > 0,5 V_c$ $\frac{0,06 \cdot \sqrt{f_c}}{f_{yw}}$
Eurocode-2001(2001)	$\frac{0,08 \cdot \sqrt{f_{ck}}}{f_{yw}}$
BS8110-2002 (2002)	$\frac{0,42}{f_{cu}}$ para $f_{cu} \leq 40 \text{ MPa}$ $\frac{0,42}{f_{yw}} (f_{cu})^{2/3}$ para $100 \text{ MPa} \geq f_{cu} > 40 \text{ MPa}$

donde:  $f_{ctm}$  es la resistencia a la tracción media del hormigón,  $f_{tk}$  es la resistencia a la tracción del hormigón según la norma NS 3473,  $V_c$  es la parcela de fuerza cortante resistida por el "hormigón",  $f_{cu}$  es la resistencia a la compresión del hormigón obtenida de ensayos de probetas cúbicas.

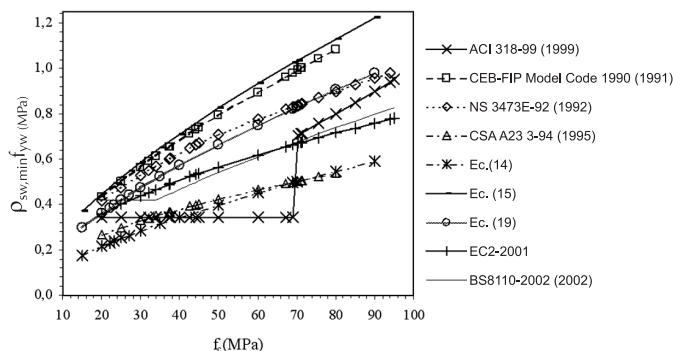


Figura 1. Valores de  $\rho_{sw,min} f_{yw}$  en función de  $f_c$  de algunas normas, fórmulas y vigas ensayadas

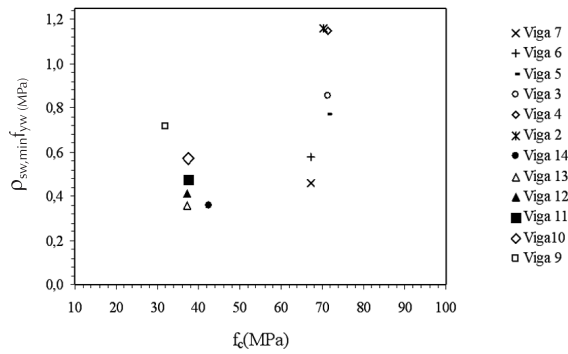


Figura 2. Valores de  $\rho_{sw,min} f_{yw}$  en función de  $f_c$  de las vigas ensayadas

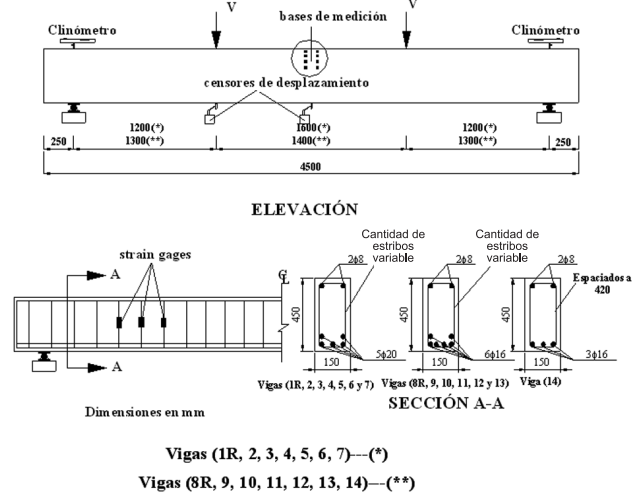
## 5. Programa experimental

### 5.1 Descripción de las vigas

En Garcia (2002) fueron ensayadas catorce vigas de sección rectangular, divididas en dos grupos. El primero formado por siete vigas (1R, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) de hormigón de resistencia a la compresión de aproximadamente 70 MPa, con valores de  $\rho_{sw} f_{yw}$  variando de 0 a 1,16 MPa, relación luz de cortante / peralte efectivo ( $a/d$ ) de aproximadamente 3 y cuantía de refuerzo longitudinal de 2,6%. El segundo grupo comprende siete vigas (8R, 9, 10, 11, 12, 13 y 14) de resistencia de hormigón a la compresión de aproximadamente 36 MPa, con valores de  $\rho_{sw} f_{yw}$  variando de 0 a 0,716 MPa, relación luz de cortante / peralte efectivo ( $a/d$ ) de aproximadamente 3 y cuantía de refuerzo longitudinal de 1,95% y 0,97% (solo la viga 14). Las cuantías de refuerzo transversal usadas están aproximadamente, en el rango de variación de las cuantías dadas por las ecuaciones ya propuestas para determinar ese refuerzo. Otros detalles de las vigas ensayadas son mostrados en la figura 3. Las vigas 1R y 8R (vigas de referencia) no tenían refuerzo transversal en la luz de cortante y si entre las cargas, con estribos de diámetro 6,3 mm, espaciados a 16mm.

### 5.2 Materiales

En la tabla 2 se muestra el diámetro del acero ( $\phi$ ), la resistencia de fluencia ( $f_y$ ), la resistencia última de tracción ( $f_{su}$ ), la deformación específica de fluencia ( $\epsilon_{sy}$ ) para 2<sup>TM</sup>, y la deformación específica de fluencia ( $\epsilon_{sy}^*$ ) correspondiente al diagrama tensión x deformación bilinear de los ensayos de resistencia a tracción del acero empleado para el refuerzo longitudinal de tracción y transversal.



Vigas (1R, 2, 3, 4, 5, 6, 7)---(\*)  
Vigas (8R, 9, 10, 11, 12, 13, 14)---(\*\*)

Figura 3. Detalles de las vigas ensayadas

Tabla 2. Resultados de los ensayos de tracción de las barras de acero usadas en las vigas

Vigas	Refuerzo longitudinal de tracción					Refuerzo transversal				
	( $\phi$ mm)	$f_y$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$\epsilon_{sy}^{(TM)}$	$\epsilon_{sy}^*$ ( $TM$ )	( $\phi$ mm)	$f_y$ (MPa)	$f_{su}$ (MPa)	$\epsilon_{sy}^{(TM)}$	$\epsilon_{sy}^*$ ( $TM$ )
A	20	546	659	3,37	3,37	6,3	390	526	2,25	2,25
B						3,4	760	840	5,75	3,8
C	16	520	857	2,40	2,40	3,4	710	837	5,50	3,4

(A)-vigas 1R, 2 y 3; (B)-vigas 4, 5, 6 y 7; (C)-vigas 8R, 9, 10, 11, 12, 13 y 14

En la tabla 3 se muestra el trazo del hormigón, la relación agua/cemento (A/C), la resistencia a la compresión media ( $f_{cm}$ ) y la resistencia a la tracción (compresión diametral) ( $f_{ct,sp}$ ) para todas las vigas ensayadas. Para determinar la resistencia a la compresión en las vigas del primer grupo (1R, 2, 3, 4, 5, 6 y 7) fueron usadas probetas cilíndricas de 100x200mm y para el segundo grupo (8R, 9, 10, 11, 12, 13 y 14) probetas cilíndricas de 150x300mm. Para determinar la resistencia a la tracción fueron usadas en ambos grupos, probetas cilíndricas de 150x300mm. La rotura de las probetas fue realizada el mismo día del ensayo de las vigas, con tiempo superior a los 28 días.



Tabla 3. Resultados de los ensayos de las probetas de hormigón para las vigas ensayadas

Vigas	Proporción	A/C	$f_{cm}$ (MPa)	$f_{ct,sp}$ (MPa)	
1R	1:1,04:2,09	0,34	70,2	3,24	
2			70,3	4,27	
3			71,3	4,03	
4			71,3	4,26	
5	1:0,94:1,89		67,1	4,53	
6 y 7			32,0	2,01	
8R	1:2,25:3,25		0,58	37,5	2,00
9				37,3	2,13
10 y 11		42,6		2,23	
12 y 13					
14					



Figura 4. Esquema para ensayo de las vigas

## 6. Procedimiento de ensayo

Las vigas ensayadas fueron simplemente apoyadas, con dos cargas concentradas equidistantes de los apoyos, como es mostrado en la figura 3 y 4. La distancia entre las dos cargas fue de 140 (primer grupo) y 160 cm (segundo grupo). La flecha fue medida en el medio de la luz y debajo de la carga izquierda, con ayuda de sensores de desplazamiento, la rotación fue medida con dos clinómetros, uno en cada extremo de la viga, la deformación del acero de flexión fue medida en el centro de la luz y la deformación de acero de cortante fue medida en seis estribos, tres a cada lado de la luz de cortante, ambos con el uso de "Strain Gages" y la deformación del hormigón a la compresión fue medida en el centro de la luz, con uso de chapas metálicas pegadas en la superficie de hormigón, usando medición manual, para la medición del ancho de fisura, se utilizó una lupa con una escala graduada, con precisión de 0,001 mm.

Las cargas fueron aplicadas a través de un sistema de control de carga y desplazamiento MTS, se usaron dos gatos de capacidad de 500kN cada uno. La aplicación de la carga fue con aumentos de 20kN hasta que cada viga alcanzara el cortante de fisuración diagonal ( $V_{cr}$ ) y después de 10kN hasta la rotura definitiva de la viga. Todas las informaciones referentes a flecha, rotación, deformación específica del acero longitudinal de tracción y transversal, deformación específica del hormigón a la compresión y desarrollo y progresión de las fisuras, fueron obtenidas y analizadas en García (2002).

## 7. Resultados de los ensayos

En la tabla 4 aparecen los principales datos y resultados obtenidos de las vigas ensayadas, tales como: cortante último ( $V_u$ ), cortante de fisuración diagonal ( $V_{cr}$ ), cortante para el cual ocurrió la fluencia del primer estribo ( $V_y$ ), cortante para el cual ocurrió la fluencia del refuerzo longitudinal ( $V_{y,l}$ ) y modos de rotura. El cortante de fisuración diagonal ( $V_{cr}$ ) de las vigas fue considerado el obtenido de las vigas de referencia (1R y 8R), a excepción las vigas 7 y 14 que resultaron en valores inferiores. Los resultados mostrados en la tabla 4 aparecen en orden creciente de  $\rho_{sw}f_{yw}$  para cada grupo de vigas.

### 7.1 Deformación específica del refuerzo transversal

La figura 5 muestra los diagramas carga vs deformación de los estribos de cada viga ensayada donde fueron medidas las mayores deformaciones, con los puntos ( $\epsilon_{sy}^*$ ,  $V_y$ ) señalados. Fue constatado que, para el análisis comparativo del comportamiento de las vigas,  $V_y$  (tablas 4 y 5) no sería un parámetro bueno; fue definido el parámetro  $V_y^*$ , este es la media de las fuerzas cortantes correspondientes a la fluencia de todos los estribos de cada viga que alcanzaron la deformación  $\epsilon_{sy}^*$ . Ese parámetro considera el número de estribos que alcanza la fluencia y la carga para la cual ocurrió la fluencia de cada uno.

En la tabla 5 aparecen los valores de cortante, relativos a la fluencia de cada estribo donde ocurrió la fluencia. En ella son presentados también los valores medios de las fuerzas cortantes de fluencia de los estribos de cada mitad de la viga ( $V_{y,i}^*$  y  $V_{y,d}^*$ ) y los valores medios considerando todos los estribos que alcanzaron la fluencia ( $V_y^*$ ).



Tabla 4. Datos y resultados de las vigas ensayadas

Vigas	$f_c$ (MPa)	$f_{ct,sp}$ (MPa)	s (mm)	$\rho_{swf_{yw}}$ (MPa)	$\rho_{swf_{su}}$ (MPa)	$V_u$ (kN)	$V_{cr}$ (kN)	$V_y$ (kN)	$V_{y,l}$ (kN)	Modos de Ruptura
1R	70,2	3,24				133	110		-	Tracción diagonal
7	67,1	4,53	200	0,460	0,50	108,5	108,5	+	-	A
6	67,1	4,53	160	0,575	0,64	185	110	116	-	A
5	71,3	4,26	120	0,767	0,84	202,5	110	150	-	A
3	71,3	4,03	190	0,853	1,15	285	110	123	250	B
4	71,3	4,26	80	1,150	1,27	240	110	220	-	A
2	70,3	4,27	140	1,158	1,56	272	110	148	247	C
8R	32,0	2,01				90	80		-	Tracción diagonal
14	42,6	2,23	240	0,358	0,42	60	60	+	-	A
13	37,3	2,13	240	0,358	0,42	90	80	+	-	A
12	37,3	2,13	210	0,409	0,48	80	80	+	-	A
11	37,5	2,00	180	0,477	0,56	115	80	108	-	A
10	37,5	2,00	150	0,573	0,68	168	80	138	140	C
9	32,0	2,01	120	0,716	0,84	127	80	120	125	B

(s) espaciamiento de los estribos;  
 (-) no ocurre la fluencia del refuerzo longitudinal;  
 (+) cuando ocurre la fluencia y la rotura prácticamente simultáneos;  
 (A) Tracción diagonal, con rotura del refuerzo transversal;  
 (B) Tracción diagonal, con fluencia del refuerzo longitudinal y rotura de los estribos;  
 (C) Fluencia del refuerzo transversal, con posterior fluencia del refuerzo longitudinal y rotura del hormigón en la zona de compresión.

Tabla 5. Valores de  $V_y^*$  de las vigas ensayadas

Vigas	Valores de $V_y^*$ (kN)						$V_y$ (kN)	$V_y^*$ (kN)	$V_{y,e}^*$ (kN)	$V_{y,d}^*$ (kN)
	Posición A	Posición B	Posición C	Posición D	Posición E	Posición F				
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6	116	157	+	+	148	+	116(A)	140	137	148
5	150	+	+	+	197	+	150(A)	174	150	197
3	151	123	285	263	182	235	123(B)	206	186	227
4	+	+	+	+	+	220	220(F)	220	+	220
2	265	203	272	272	272	148	148(F)	238	247	231
14	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
13	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
12	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
11	+	+	+	+	108	108	108(E)	108	+	108
10	+	168	153	138	150	168	138(D)	155	161	152
9	120	120	+	+	+	120	120(F)	120	120	120

(+) el acero de cortante no alcanzó la fluencia;  
 (A, B, C, D, E y F) son las posiciones de los estribos que fueron medidas las deformaciones (ver figura 4).

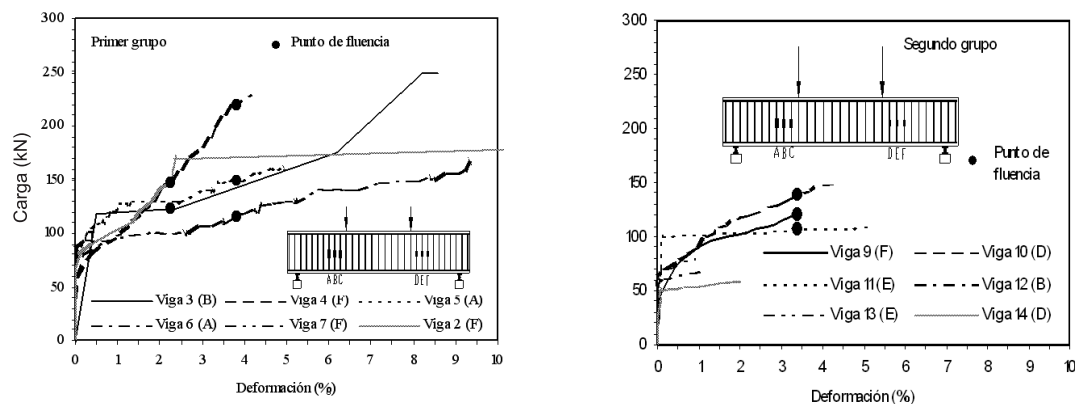


Figura 5. Diagramas carga x deformación dos estribos de cada viga ensayada donde fueron medidas las mayores deformaciones

## 8. Análisis de los resultados visando determinar el refuerzo transversal mínimo

### 8.1 Parámetro propuesto para definir el refuerzo transversal mínimo

En García (2002) el criterio propuesto para evaluar el nivel de ductilidad de las vigas ensayadas es mostrado en la figura 5. En esta figura está mostrado esquemáticamente la relación entre la tensión tangencial nominal relativa en una viga,  $(\tau_w/\tau_{wcr})$ , y la deformación relativa de los estribos  $(\epsilon_w/\epsilon_{wy})$ . En una viga con refuerzo transversal menor que el mínimo se tiene  $\tau_{wu}/\tau_{wcr} = \tau_{wy}/\tau_{wcr} = \tau_{wy}^*/\tau_{wcr} \approx 1$ , o sea, el ángulo  $\alpha$  ( $\text{tg}\alpha = \tau_{wy}^*/\tau_{wcr} - 1$ ) mostrado en la figura 6 es aproximadamente igual a cero. Vigas con refuerzos mayores que el mínimo llevan a diferencias entre los valores de  $\tau_{wcr}$ ,  $\tau_{wy}$  y  $\tau_{wu}$  y entre  $\tau_{wy}$  y  $\tau_{wy}^*$ , y por tanto, valores de  $\alpha$  mayores que cero, indicará mayores niveles de ductilidad.

Son presentadas en la tabla 6 las tensiones tangenciales nominales relativas, correspondientes a las cargas sobre las cuales ocurrieron las fisuras diagonales ( $\tau_{wcr}$ ), la fluencia de los estribos ( $\tau_{wy}$  y  $\tau_{wy}^*$ ) y la rotura ( $\tau_{wu}$ ) de las vigas, las relaciones entre estas tensiones y relaciones entre ellas y  $f_{cm}$  y  $f_{ct}$ , considerándose la relación  $f_{ct} = 0,9f_{ct,sp}$ .

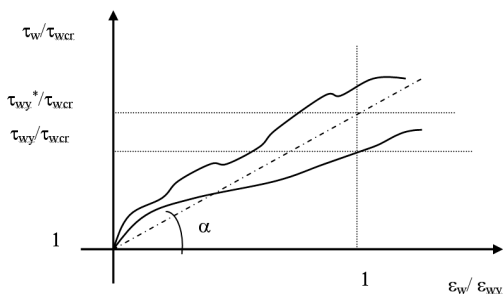


Figura 6. Esquema de gráfico de la tensión tangencial nominal relativa en una viga ( $\tau_w/\tau_{wcr}$ ), en función de la deformación relativa en los estribos ( $\epsilon_w/\epsilon_{wy}$ )

Tabla 6. Tensiones tangenciales nominales relativas de las vigas ensayadas

Viga	$\rho_{sw}f_{yw}/f_{cm}$	$\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct}$	$\tau_{wcr}/\tau_{wcr}$	$\tau_{wy}/\tau_{wcr}$	$\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$	$\tau_{wu}/\tau_{wcr}$	$\tau_{wcr}/f_{cm}$	$\tau_{wy}/f_{cm}$	$\tau_{wu}/f_{cm}$	$\tau_{wcr}/f_{ct}$	$\tau_{wu}/f_{ct}$
1R			1,21				0,031	0,026	0,455	0,624	
7	0,0068	0,112	1,00	+	+	+	0,027	0,027	0,436	0,446	
6	0,0086	0,141	1,68	1,58	1,06	1,26	0,045	0,027	0,745	0,446	
5	0,0108	0,125	1,84	1,35	1,36	1,57	0,047	0,025	0,868	0,474	
3	0,0119	0,235	2,58	2,32	1,11	1,86	0,066	0,025	1,294	0,502	
4	0,0161	0,270	2,18	1,09	2,00	1,99	0,055	0,025	1,027	0,474	
2	0,0165	0,300	2,47	1,84	1,34	2,16	0,064	0,026	1,170	0,473	
8R			1,13				0,045	0,040	0,800	0,710	
14	0,0084	0,179	1,00	+	+	+	0,022	0,022	0,466	0,466	
13	0,0096	0,186	1,13	+	+	+	0,039	0,035	0,755	0,677	
12	0,0110	0,213	1,00	+	+	+	0,035	0,035	0,677	0,677	
11	0,0127	0,264	1,44	1,07	1,23	1,35	0,050	0,034	1,032	0,721	
10	0,0154	0,317	2,10	1,22	1,73	1,93	0,072	0,034	1,498	0,721	
9	0,0224	0,395	1,59	1,06	1,50	1,51	0,064	0,040	1,132	0,888	

(+)-cuando ocurre la fluencia y la rotura prácticamente simultáneas

En García (2002) fue demostrado que las relaciones  $(\tau_{wu}/\tau_{wcr}$  y  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{cm})$ ,  $(\tau_{wu}/\tau_{wcr}$  y  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct})$  y  $(\tau_{wy}/\tau_{wcr}$  y  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct})$  de las vigas ensayadas por el autor y otras ensayadas por (Jonson y Ramírez, 1989), (Yoon et al., 1996), (Ozcebe et al., 1999) y Simplicio (1999) no fueron los mejores parámetros para servir de base para definir cuantía mínima de refuerzo transversal. Las relaciones  $\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$  y  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct}$  constatadas para las vigas ensayadas por García (2002) pueden ser vistas en la figura 7. Desconsiderando la viga 9, la cual, por motivos no detectados, tuvo resultados incoherentes cuando comparada con las demás vigas. Se verificó que el parámetro  $\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$  parece poder ser adoptado para definir cuantía mínima de refuerzo transversal y puede ser recomendado un valor de  $\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$  alrededor de 1,4, próximo al de las vigas 6, 5, y 11, pudiendo ser adoptado para verificar si una viga tiene o no, refuerzo transversal mínimo.

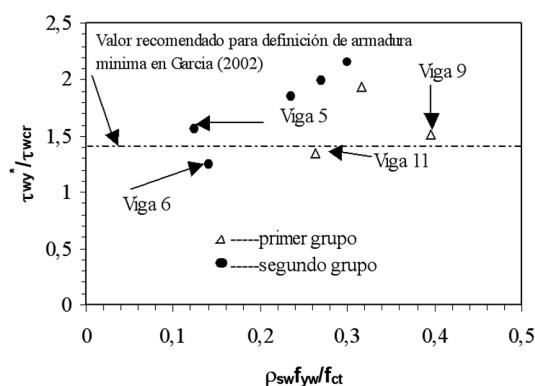


Figura 7. Relación  $\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$  en función de  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct}$  para las vigas ensayadas por García (2002)

Las curvas carga x deformación de los estribos y progresión de las aberturas de fisuras de las vigas 6, 5 y 11 presentadas en García (2002), mostraron que una cuantía de refuerzo entre la de las vigas 5 y 6, puede ser admitida como la cuantía mínima de refuerzo transversal de las vigas del primer grupo y la cuantía de refuerzo transversal de la viga 11, la cuantía mínima de refuerzo transversal del segundo grupo.



## 8.2 Influencia de $\rho_{sw}f_{yw}$ y $f_c$ en la deformación de los estribos y en el padrón de fisuración de las vigas ensayadas

La figura 8 muestra una comparación de las deformaciones de los estribos de las vigas 6, 5 y 11 (vigas con aproximadamente la cuantía mínima de refuerzo transversal). Observase que con aumento de  $\rho_{sw}f_{yw}$  y de  $f_c$  estas deformaciones tienden a disminuir. Estos parámetros junto con la cuantía de refuerzo longitudinal ( $\rho$ ), son los definidores del padrón de fisuración de las vigas.

En la figura 9 son comparadas las vigas 6 y 10 y las 7 y 11, con  $\rho_{sw}f_{yw}$  aproximadamente igual y diferente resistencia a la compresión del hormigón ( $f_c$ ) y refuerzo longitudinal, mostrándose la influencia de  $f_c$  y  $\rho$  en el padrón de fisuración. Son también comparadas las vigas 6 y 7 y las 10 y 11, con igual resistencia a la compresión del hormigón ( $f_c$ ) y refuerzo longitudinal ( $\rho$ ), y diferente  $\rho_{sw}f_{yw}$ , mostrando la influencia del refuerzo transversal en el padrón de fisuración.

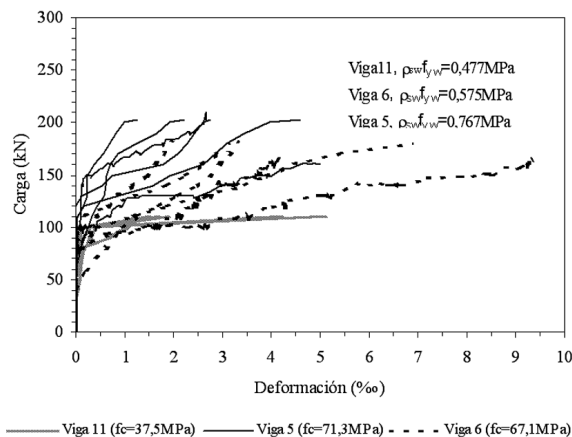


Figura 8. Diagramas carga x deformación de los estribos para vigas con diferentes refuerzos transversal y resistencia a la compresión del hormigón, que tiene este refuerzo transversal aproximadamente el mínimo

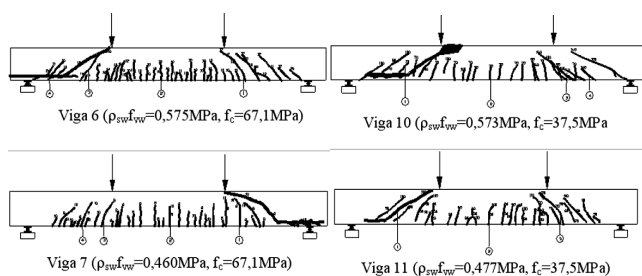


Figura 9. Influencia de  $\rho_{sw}f_{yw}$  y de otros parámetros en los padrones de fisuración

## 8.3 Verificación de los criterios de definición de armadura transversal mínima ya propuestos

### 8.3.1. Criterio de reserva de resistencia considerando la relación $V_u/V_c$ .

La figura 10 muestra los valores de  $V_u/V_c$  en función de  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{cm}$  para las vigas ensayadas, junto con el valor mínimo de esta relación propuesta por Ozcebe et al., (1999). Para el cálculo de  $V_c$ , fueron consideradas las fórmulas de las normas NS3473-92(1992), ACI-318-99(1999), CEB-FIP Model Code 1990(1991), CSA A23.3-94(1995), EC2-2001 y BS8110 (2002). De estas, la que llevó al valor de  $V_c$  más próximo de  $V_u$  de las vigas 1R y 8R fue la norma NS3473-92 (1992).

De la figura 10, se puede concluir que las variaciones de  $V_u/V_c$ , resultado de las aproximaciones en los cálculos de  $V_c$  llevan a obtenerse valores de  $V_u/V_c$  de las vigas 5, 6 y 11 más próximos o más distantes del valor de 1,5 propuesto por Ozcebe et al., (1999). A pesar de esas variaciones, independiente de la norma adoptada para cálculo de  $V_c$ , ese criterio lleva a concluir que las vigas 7, 14, 13 y 12 tienen armadura menor que la mínima.

### 8.3.2. Criterio de índice de ductilidad

En la figura 11 son relacionados los valores de flecha correspondiente al cortante último / flecha correspondiente al cortante de fisuración diagonal ( $\Delta_u/\Delta_{cr}$ ) con los de  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct}$  para las vigas ensayadas, junto con el valor mínimo recomendado por Ozcebe et al., (1999) para este índice. En ella obsérvase que, el valor de  $\Delta_u/\Delta_{cr}=2,5$  definido, no puede ser considerado adecuado, pudiéndose, por tanto adoptar para  $\Delta_u/\Delta_{cr}$  el valor alrededor de 2,0.

## 8.4 Propuesta de expresión para la evaluación de $\rho_{sw,min}f_{yw}$

En la figura 12 es mostrada una comparación entre las expresiones de la norma Eurocode-2001 (2001) y BS8110-2002 (2002) y la fórmula 19 obtenida por Queiróz (1999), las cuales fueron las que resultaron en relaciones de  $\rho_{sw}f_{yw}$  y  $f_c$  más próximas de las vigas que resultaron tener refuerzo transversal aproximadamente el mínimo ( $\rho_{sw,min}f_{yw}$ ). También aparecen los resultados de los experimentos de las vigas 6, 5 y 11 y la fórmula 20 propuesta en García (2002). Esta última fue obtenida admitiéndose que  $\rho_{sw,min}$  es función de  $f_{ct}$  y que  $f_{ct}=kf_c^{0,67}$ . El valor de 0,045 en la fórmula 20 fue definido de manera que (con base en los datos de las vigas 6, 5 y 11) se tuvieran valores de  $\rho_{sw,min}$  conservadores.

$$\rho_{w,\min} = 0,045 \frac{f_{ck}^{0,67}}{f_{yw}} \quad (20)$$

La fórmula 20, coincide con la media de las fórmulas 14 y 15 que aproximadamente corresponden al límite inferior y superior, respectivamente, de todas las ecuaciones propuestas por las normas.

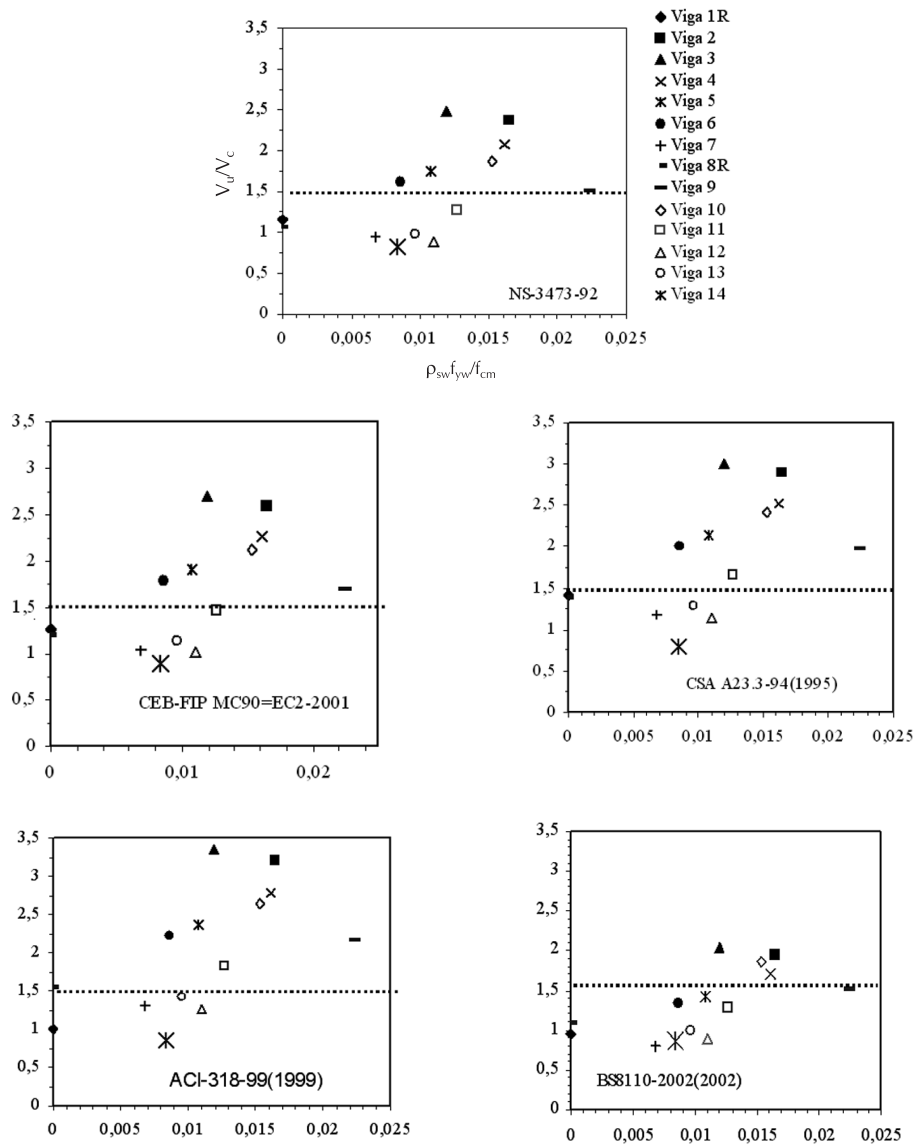


Figura 10. Relación  $V_u/V_c$  en función de  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{cm}$  para las vigas ensayadas, siendo  $V_c$  calculado según diferentes normas.  
 .....Valor mínimo recomendado por Ozcebe et al., (1999)

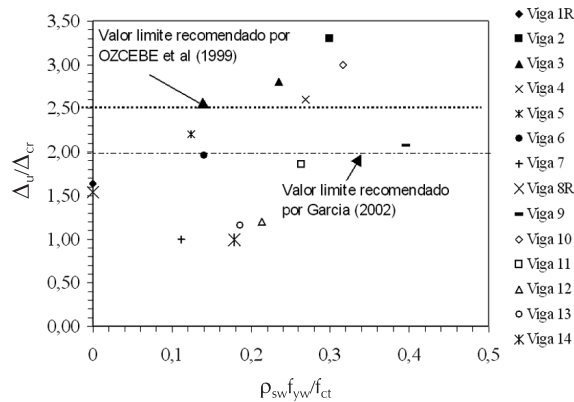


Figura 11. Índice de ductilidad ( $\Delta_u/\Delta_{cr}$ ) en función de  $\rho_{sw}f_{yw}/f_{ct}$  para las vigas ensayadas.

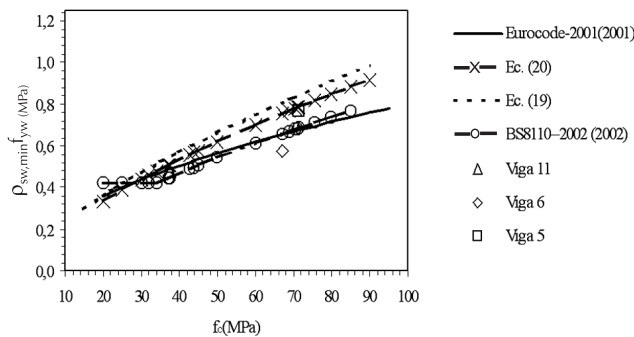


Figura 12. Vigas con refuerzo transversal aproximadamente igual al mínimo y las fórmulas de  $\rho_{sw,min}f_{yw}$  consideradas más adecuadas.

## 9. Conclusiones

En este trabajo de investigación se ha demostrado que las normas de cálculo de estructuras de hormigón para determinar la cuantía mínima de refuerzo transversal de vigas obtienen valores muy diferentes. Esto se debe a que todas las normas objetivan con la cuantía mínima de refuerzo transversal proponen evitar roturas frágiles de las vigas en caso de que ocurra fisuración diagonal.

El nuevo criterio propuesto para definir si una viga tiene o no, refuerzo transversal mínimo, es más preciso y se basa en el parámetro  $\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$ , el cual fue más adecuado, y las vigas ensayadas sugieren que un valor de  $\tau_{wy}^*/\tau_{wcr}$  en torno de 1,4, puede ser usado para definir las vigas que tienen refuerzo transversal mínimo.

De las doce vigas ensayadas (con refuerzo transversal), solamente tres de ellas (6, 5 y 11) tenían aproximadamente el refuerzo transversal mínimo, las otras tenían refuerzo superior o inferior al mínimo.

Las expresiones de  $\rho_{sw,min}$  de algunas normas de cálculo suministran valores de esa cuantía de refuerzo, menores que los necesarios para evitar rotura brusca. Por otro lado, las de otras normas llevan a valores significativamente mayores a los necesarios.

## 10. Referencias

- American Concrete Institute. (1999), Building code Requirements for Reinforced Concrete and Commentary - ACI 318-99/ACI 318R-99.
- British Standards Institute. (2002), The Structural Use of Concrete, Part 1, BS8110 2002, Code of Practice for Design and Construction.
- Canadian Standards Association. (1995), Design of Concrete Structures, Concrete Design Handbook, CSA-A23.3 94, Canadian Portland Cement Association.
- Castro F. (1997), Cisalhamento em Vigas de Concreto Armado - Estudo Paramétrico, Tese de Mestrado, COPPE/UFRI, Rio de Janeiro, Brasil.
- Comitê Euro-International du Vetón. (1991), CEB-FIP Model Code 1990, CEB Bull. d' information. n. 203, 204 e 205.
- European Committee for Standardization. (2001), Design of Concrete Structures, part 1, Eurocode 2, General Rules and Rules for Buildings, 1st Draft.
- Garcia S. (2002) Taxas de Armadura Transversal Mínima em Vigas de Concreto de Armado, Tese de Doutorado, COPPE/UFRI, Rio de Janeiro, Brasil.
- Jonson M. y Ramirez J. (1989), Minimum Shear Reinforcement in Beams With Higher Strength Concrete, ACI Structural Journal, 86(4), 376-382.
- Norwegian Council for Building Standardization. (1992), Concrete Structures Design Rules-NS 3473E, 4th ed.
- Ozcebe G., Ersoy U. y Tankut T. (1999), Evaluation of Minimum Shear Reinforcement Requirements for Higher Strength Concrete, ACI Structural Journal, 96(3), 361-368.
- Queiróz R. (1999), Taxa de Armadura Mínima de Flexão e de Cortante em Vigas de Concreto Armado, Tese de Mestrado, COPPE/UFRI, Rio de Janeiro, Brasil.
- Shehata I., Shehata L. y Garcia S. (2000), Taxas de Armadura Mínimas em Vigas de Concreto de Diferentes Resistências - Enfoque Teórico, IV Congresso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Juiz de Fora, Rio de Janeiro, Brasil.
- Shehata I., Shehata L. y Garcia S. (2003), Minimum steel ratios in reinforced concrete beams made of concrete with different strengths -Theoretical approach. Materials

And Structures, 36, 3-11,

Simplicio M. (1999), Comportamento de Vigas de Concreto de Alto Desempenho Com Pequenos Percentuais de Armadura Transversal, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Pernambuco, Brasil.

Yoon S., Cook W. y Mitchell D. (1996), Minimum Shear Reinforcement in Normal, Medium and High-Strength Concrete Beams, ACI Structural Journal, 93(5), 576-584.

